EIGENWERTPROBLEME
UND IHRE NUMERISCHE BEHANDLUNG

VON

DR. LOTHAR COLLATZ
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN
HOCHSCHULE HANNOVER

MIT 104 ABBILDUNGEN UND 12 TAFELN

Published and Distributed in the Public Interest by Authority of the Attorney General under License No. A-1296

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
231 WEST 29TH STREET, NEW YORK 1, N. Y.
1948

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

MEINER FRAU MARTHA

GEWIDMET

Vorwort.

Der vorliegende kleine Band kann und soll nur eine kurze Einführung in das umfangreiche Gebiet der Eigenwertaufgaben und ihrer numerischen Behandlung geben. Sowohl das Schrifttum über die mathematische Theorie als auch das Schrifttum über die technisch-physikalischen Anwendungen ist in den letzten Jahrzehnten zu stark angewachsen, als daß hier Vollständigkeit angestrebt werden könnte. Insbesondere beschränken sich die Anwendungen hauptsächlich auf das Gebiet der Mechanik; im übrigen geben Einleitung und Inhaltsverzeichnis einen Überblick über die Abgrenzung des dargestellten Stoffes.

Der Band stellt eine erweiterte Wiedergabe von Vorlesungen dar, die ich im Sommersemester 1942 vor Diplomingenieuren und interessierteren Studenten hielt, und setzt vom Leser etwa das voraus, was an einer Technischen Hochschule in den Vorlesungen über Mathematik und Mechanik gebracht zu werden pflegt. Nur an wenigen besonders gekennzeichneten Stellen wird etwas mehr vorausgesetzt, aber das Ergebnis so formuliert, daß es auch ohne Lesen des Beweises verständlich ist.

Den Leser muß ich um Nachsicht bitten, wenn der Band nicht bis in alle Einzelheiten so abgerundet ist, wie ich es selbst gerne erreicht hätte; infolge kriegsbedingter Umstände stand mir nur wenig freie Zeit zur Verfügung. Trotzdem hoffe ich, das Buch werde auch in der jetzigen Gestalt den Leser bei ernsthafter Mitarbeit in den Stand setzen, ein an ihn neu herantretendes Eigenwertproblem bis zur numerischen Lösung zu bearbeiten; dazu sollen auch die zahlreichen eingestreuten Zahlenbeispiele helfen.

Herrn Prof. Dr. E. KAMKE, dessen allgemeine Theorie der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen dem vorliegenden Bande zugrunde gelegt wurde, bin ich für zahlreiche wertvolle Verbesserungsvorschläge zu großem Danke verpflichtet. Ferner haben die Herren Dr. H. HEINZERLING-Berlin-Adlershof und Dozent Dr. H. WIELANDT-Göttingen Korrekturen gelesen. Ihnen möchte ich an dieser Stelle für die mühevolle Arbeit und für viele Bemerkungen herzlich danken. Auch Herr Dr. W. PÜSCHEL-Darmstadt machte einige Verbesserungsvorschläge. Die Herren

cand. mach. J. ESSER und cand. math. R. LINNEMANN haben vom Reichsforschungsrat in dankenswerter Weise finanzierte Kontrollrechnungen für die Tabellen durchgeführt. Schließlich gebührt mein Dank der Akademischen Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges., die es trotz aller durch den Krieg hervorgerufenen Schwierigkeiten ermöglicht hat, das Buch auch in dieser ernsten Zeit in der bekannten guten Ausstattung herauszubringen.

Hannover, im Oktober 1944.

Lothar Collatz.

Inhaltsverzeichnis.

5. Kapitel. Numerische Verwertung der Minimaleigenschaften.

§ 15. Grundlagen des RITZschen Verfahrens.

§ 16. Weitere Ausführungen zum RITZschen Verfahren.

6. Kapitel. Das Differenzenverfahren.

§ 17. Das Differenzenverfahren erster Annäherung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

§ 18. Verschärfungen des Differenzenverfahrens.

Seite

§ 19. Das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen.

7. Kapitel. Verschiedene andere Verfahren.

§ 20. Störungsrechnung.

§ 21. Weitere Methoden.

Einleitung und kurzer Überblick.

Eines der ältesten mathematisch durchgerechneten Eigenwertprobleme ist das von LEONHARD EULER 1744 behandelte Problem, die kritische Last, die sog. „EULERsche Knicklast", für einen auf Druck beanspruchten und der Gefahr des Ausknickens unterliegenden schlanken Stab zu bestimmen. Im 19. Jahrhundert traten beim Ausbau der klassischen „mathematischen Physik" zahlreiche Eigenwertaufgaben bei Schwingungsproblemen auf. Die letzten Jahrzehnte lieferten in den verschiedensten Zweigen der Physik und Technik Eigenwertprobleme in einer solchen Fülle, daß in diesem Bande nicht auf alle Anwendungsmöglichkeiten eingegangen werden kann. Im 1. Kapitel wird daher ein spezielles Gebiet, die Mechanik, herausgegriffen; bereits bei diesem Gebiet treten verschiedenartige Eigenwertprobleme auf, so daß die charakteristischen Erscheinungen gut beobachtet werden können. Insbesondere zeigt sich, daß man sich heutzutage nicht mehr wie noch vor einigen Jahrzehnten im wesentlichen auf die sog. „speziellen Eigenwertaufgaben" mit Differentialgleichungen der Form

$$M[z] = \lambda p \cdot z$$

beschränken kann, sondern man ist genötigt, sich mit den „allgemeinen Eigenwertaufgaben"

$$M[z] = \lambda N[z]$$

zu beschäftigen. Dabei ist z die unbekannte Eigenfunktion, λ der Eigenwert, p eine gegebene Funktion der unabhängigen Koordinaten, M und N gegebene lineare homogene Differentialausdrücke. Hinzu treten noch gewisse Randbedingungen. Eine besondere Rolle spielen die Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen; sie sind wesentlich weiter erforscht als die bei partiellen Differentialgleichungen. Die Eigenwertaufgaben bei den letzteren werden unter Verzicht auf eine systematische Behandlung nur soweit kurz besprochen, wie es für ihre numerische Behandlung gebraucht wird.

Es gibt verschiedene Wege, auf denen man eine Theorie der Eigenwertprobleme entwickeln kann. Die drei wichtigsten sind

1. der Weg der Differentialgleichungen,
2. der Weg der Integralgleichungen,
3. der Weg der Variationsrechnung.

Jeder dieser Wege hat seine besonderen Vorzüge. Die klassische Integralgleichungstheorie von FREDHOLM, HILBERT, E. SCHMIDT u. a. stellt einen sehr eleganten Zugang zur Eigenwerttheorie dar. Sie liefert viele Tatsachen auf kurzem Wege, wie z. B. den Satz von der Entwicklung willkürlicher Funktionen, und führt bei partiellen Differentialgleichungen ebenso zum Ziele wie bei gewöhnlichen; sie verlegt die Schwierigkeit an eine frühere Stelle, nämlich an ihre Entstehung; die Existenz der GREENschen Funktion und damit des Kernes der Integralgleichung wird von der Integralgleichungstheorie vorausgesetzt, aber die Frage nach der Existenz nicht beantwortet (jedenfalls nicht im allgemeinen). Die Integralgleichungstheorie führt bis zu den Problemen der Eingliedklasse (§ 7); die allgemeinen Eigenwertprobleme führen auf Integrodifferentialgleichungen, die man bis jetzt mathematisch nur wenig beherrscht.

Die Variationsrechnung verwendet Minimaleigenschaften der Eigenwerte. Bei ihr erscheinen Differentialgleichungen und Randbedingungen als die notwendigen EULERschen Bedingungen für ein Minimum. Diese Minimaleigenschaften bilden eine für die numerische Behandlung von Eigenwertaufgaben äußerst fruchtbare und von W. RITZ in ihrer vollen Bedeutung erkannte Grundlage. Dagegen bleibt in der klassischen Variationsrechnung die Frage nach der Existenz eines Minimums, die Frage nach der Art der Extrema bei den höheren Eigenwerten usw. offen.

Der unmittelbare Weg der Differentialgleichungen ist für gewöhnliche Differentialgleichungen nach der Theorie von E. KAMKE der weitgehendste. Er ist in diesem Bande ausführlicher als die anderen Wege beschrieben. Es können auf diesem Wege die Minimaleigenschaften der Eigenwerte für allgemeine Eigenwertprobleme, sofern sie nur selbstadjungiert (4·3) und volldefinit (4·9) sind, auf direkte Art und auf einem vielleicht für manchen Leser noch etwas ungewohnten, aber nicht schwierigen Wege bewiesen werden, die Fragen nach der Existenz des Minimums beim RAYLEIGHschen Quotienten (8·1), nach Existenz unendlich vieler Eigenwerte, nach den Minimaleigenschaften der höheren Eigenwerte können beantwortet werden.

An die Minimaleigenschaften knüpft sich zwanglos das Verfahren der schrittweisen Näherungen (4. Kapitel) an. In diesem wird eine fundamentale Formel (12·19) genannt, deren Anwendung zwar an einige Zusatzvoraussetzungen gebunden ist (vgl. den Satz in 12·4). Sind aber diese Voraussetzungen erfüllt, was in vielen Anwendungsfällen zutrifft, so erhält man in der Formel (12·19) eine für Anwendungszwecke im allgemeinen genügend genaue, mit relativ geringer Rechenarbeit aufstellbare obere und untere Schranke für den ersten Eigenwert.

Im 6. und 7. Kapitel folgen einige Verfahren zur genäherten Eigenwertbestimmung, die sich ziemlich allgemein (mit nur geringen Voraussetzungen) anwenden lassen, bei denen man dafür aber auch nur wenig aussagen kann, ja meist nicht einmal weiß, ob die erhaltenen Näherungswerte zu groß oder zu klein sind. Man wird diese Verfahren, wie z. B. das Differenzenverfahren, anwenden, wenn man sich mit kurzer Rechenarbeit einen Überblick über die Größenordnung der Eigenwerte verschaffen will oder wenn die in den früheren Kapiteln beschriebenen Verfahren wegen nicht erfüllter Voraussetzungen nicht anwendbar sind. Die Handhabung der verschiedenen Methoden wird jeweils an Beispielen erläutert (eine Zusammenstellung der Beispiele befindet sich am Schluß des Buches). Weitere Zahlenbeispiele finden sich in meinem Bericht, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) 224. Vorschläge dafür, welche Methoden man in einem vorgelegten Falle anwenden soll, werden in einer Übersicht (ebenfalls am Schlusse des Buches) gegeben.

I. Kapitel.

Beispiele technischer Eigenwertprobleme aus der Mechanik.

Zunächst sollen einige Beispiele technischer Fragen besprochen werden, die auf Eigenwertprobleme führen. Dabei wird sich zeigen, daß schon bei ganz einfachen mechanischen Fragestellungen komplizierte mathematische Probleme auftreten. Der mechanische Sachverhalt kann jeweils nur kurz gestreift werden, ausführlichere Darstellungen bringen die Lehrbücher über technische Mechanik.

§ 1. Ausweichprobleme.

1·1. Stabknickung, Stab eingespannt-frei. Als einfachstes Eigenwertproblem betrachten wir einen am einen Ende eingespannten Stab der Länge l, dessen anderes Ende frei beweglich ist und eine im Schwerpunkt der Endfläche angreifende Last P trägt, die in Richtung der Stabachse wirkt. Die Querschnitte des Stabes brauchen nicht gleich groß zu sein, aber die Hauptträgheitsachsen sämtlicher Querschnitte sollen in zwei feste Richtungen fallen.

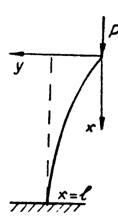


Abb. I·I. Ausknicken eines Stabes mit einem eingespannten und einem freien Ende.

Bei jedem Wert von P ist der Fall, daß die Stabachse geradlinig bleibt, als Gleichgewichtsfall möglich. Man weiß jedoch, daß es einen kritischen Wert von P gibt, oberhalb dessen die geradlinige Lage nicht die stabile, sondern eine labile Gleichgewichtslage ist. Bei der stabilen Gleichgewichtslage hat der Stab eine ausgebogene Form. Wir interessieren uns nun für den Beginn des Ausknickens, d. h. wir betrachten eine von der geradlinigen Gestalt ein wenig verschiedene (ausgebogene) Gleichgewichtslage des Stabes. Für diese Lage (vgl. Abb. I·I, dort ist auch die Lage der Koordinatenachsen x, y eingetragen; der Koordinaten-Anfangspunkt wird in den Angriffspunkt der

Kraft P gelegt) lautet die Gleichung der elastischen Linie bei kleinen Auslenkungen $y(x)$

(1·1) $$M = Py = -EJy'' = -\alpha y''.$$

Dabei sind die üblichen Bezeichnungen verwendet: Biegemoment M, Elastizitätszahl E, axiales Flächenträgheitsmoment J, Biegesteifigkeit $\alpha = EJ$; Striche bedeuten Ableitungen nach x.

Man hat also als Differentialgleichung des Problems

(1·2) $$y'' = -\frac{P}{\alpha(x)}\,y.$$

Von der Zusammendrückung des Stabes und von etwaigem unelastischem Verhalten ist abgesehen. Zur mathematischen Formulierung des Problems gehören außer der Differentialgleichung noch die „Randbedingungen", die hier von der Lagerungsart des Stabes abhängen. Man liest aus der Abb. 1·1 unmittelbar die geometrischen Bedingungen ab $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$.

Es sind nun Lösungen des aus Differentialgleichung und Randbedingungen zusammengesetzten Problems gesucht. Wir nehmen als Beispiel einen Stab konstanten Querschnittes, also $\alpha = \text{const}$, und setzen $\frac{P}{\alpha} = \lambda = k^2$. Dann lauten die Lösungen der Differentialgleichung

$$y = A\cos kx + B\sin kx.$$

Die willkürlich wählbaren Integrationskonstanten A und B sind den Randbedingungen anzupassen.

Aus $\quad y(0) = 0 \quad$ folgt $\quad A = 0$.

Die zweite Randbedingung liefert

$$y'(l) = kB\cos kl = 0.$$

Es ist also entweder

1. $k = 0$, d. h. keine Belastung, dieser Fall ist ohne Interesse. Oder
2. $B = 0$, das ergibt:

$$y(x) \equiv 0.$$

Diese Lösung ist immer möglich, stellt die geradlinige Gleichgewichtslage dar und interessiert uns ebenfalls jetzt nicht. Oder

3. $\cos kl = 0$, das ergibt:

$$kl = \frac{\pi}{2},\quad 3\frac{\pi}{2},\quad 5\frac{\pi}{2},\ldots$$

Zu diesen Werten von k gehören die „Knicklasten":

$$P_m = \alpha k^2 = \alpha\left[\frac{(2m-1)}{2l}\pi\right]^2 \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

und zu jedem dieser ausgezeichneten k-Werte gehört eine ganz bestimmte (bis auf einen konstanten Faktor B festgelegte) Ausbiegungsfunktion $y(x) = B\sin kx$ (Abb. 1·2).

Wir stellen nochmals den mathematischen Sachverhalt fest: Vorgelegt ist eine lineare homogene Differentialgleichung

$$y'' = -\lambda y$$

mit den homogenen Randbedingungen $y(0) = y'(l) = 0$.

Für jeden Wert von λ hat dieses Randwertproblem die „triviale“ Lösung $y \equiv 0$. Außerdem gibt es aber noch gewisse Werte von λ, nämlich die abzählbar unendlich vielen Werte

$$\left[\frac{(2m-1)}{2l}\pi\right]^2$$

für $m = 1, 2, \ldots$, für welche das Problem eine nicht identisch verschwindende („nichttriviale“) Lösung $y(x)$ hat. Diese Werte von λ nennt man die „Eigenwerte“ des Problems, und zu jedem Eigenwert gibt es eine, bis auf einen konstanten Faktor bestimmte, Lösungsfunktion $y(x)$, die man „Eigenfunktion“ nennt. Die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenfunktionen ist die gewöhnlich zu lösende, vom physikalisch-technischen Standpunkt aus interessierende Aufgabe. Sie kann auf große Schwierigkeiten stoßen, da die Lösung in geschlossener Form, wie wir sie eben kennen lernten, besonders bei Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten, oft nicht möglich ist. Wir werden uns in diesem Kapitel weiterhin damit begnügen, die betreffenden Fragen auf Eigenwertaufgaben zurückzuführen und diese mathematisch zu formulieren, und verschieben die numerische Behandlung auf spätere Kapitel.

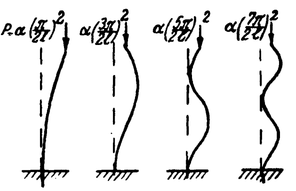


Abb. 1·2. Die ersten vier Eigenfunktionen (mögliche Gleichgewichtslagen) des prismatischen, eingespannt-freien Knickstabes mit den zugehörigen Knicklasten.

1·2. Knicken des eingespannt-gelenkig gelagerten Stabes. Es sei nun, etwa wie in Abb. 1·3, der obere Punkt vertikal geführt. Hierbei wirkt auf den oberen gelenkig angeschlossenen Punkt außer P noch eine unbekannte Horizontalkraft H. Daher lautet jetzt das Biegemoment

$$M = Py - Hx = -EJy'' = -\alpha y''.$$

Die noch unbekannte Kraft beseitigen wir durch zweimalige Differentiation und erhalten die Differentialgleichung:

$$(1\cdot 3) \qquad (\alpha y'')'' = -Py''.$$

Da die Gleichung von vierter Ordnung ist, benötigen wir auch vier Randbedingungen (unten

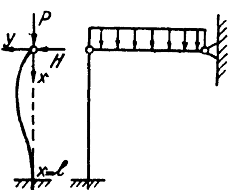


Abb. 1·3. Ausknicken des eingespannt-gelenkig gelagerten Stabes.

Einspannung, oben verschwindet das Biegemoment):

$$y(0) = 0, \qquad y(l) = 0,$$
$$y''(0) = 0, \qquad y'(l) = 0.$$

Die gesuchte Knicklast P erscheint hier als Eigenwert λ eines Problems vierter Ordnung. Wir bemerken, daß der Eigenwert λ nicht mehr wie in (1·2) mit y selbst, sondern mit der Ableitung y'' multipliziert auftritt.

1·3. Stabknickung mit Berücksichtigung des Eigengewichtes. Bei dem Knickstab von 1·1, der jetzt senkrecht stehen möge, soll nun noch das Eigengewicht des Stabes berücksichtigt werden[1]). Die unten angreifende Druckkraft P ist dann die Summe aus der oben angreifenden Druckkraft P_0 und dem Gesamtgewicht G_0 des Stabes (vgl. Abb. 1·4). Es werde wie in 1·1 eine von der geradlinigen Gestalt verschiedene, schwach ausgebogene Gleichgewichtslage zugrunde gelegt. Zu dem Biegemoment $M(x)$ an der Stelle x trägt jetzt außer der Kraft P noch das verteilte Eigengewicht des Stabes bis zur Stelle x bei; auf ein Stabelement der Länge $\Delta\xi$ im Abstand ξ vom oberen Stabende (Abb. 1·4) wirkt die Schwerkraft $\gamma F \Delta\xi$, wenn F die Querschnittsfläche des Stabes und γ das spezifische Gewicht bezeichnet. Jetzt kann man das Biegemoment an einer beliebigen Stabstelle bilden und hat damit als Gleichung der elastischen Linie:

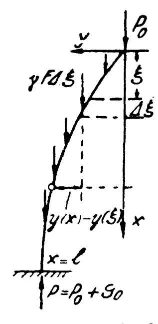


Abb. 1·4. Ausknikken eines einseitig eingespannten Stabes bei Berücksichtigung des Eigengewichts.

$$M = P_0 y + \int_0^x \gamma F(\xi)\,[y(x) - y(\xi)]\,d\xi = -\,\alpha y''.$$

Durch Differenzieren beseitigt man das Integral. Nach der allgemeinen Regel zum Differenzieren eines Integrals nach einem Parameter[2])

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} G(x,\xi)\,d\xi = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\,d\xi + G(x,\psi(x))\,\psi'(x) - G(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

erhält man

$$P_0 y' + \int_0^x \gamma F(\xi)\, y'(x)\,d\xi = -\,(\alpha y'')'$$

---

[1]) FR. A. WILLERS, Das Knicken schwerer Gestänge, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) 43; R. GRAN OLSSON, Ing.-Archiv 13 (1942) 162, dort als Problem zweiter Ordnung behandelt.

[2]) K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. III, Leipzig 1933, S. 319; Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, 27. Aufl. Berlin 1942, Bd. I, 118.

oder

$$(P - G_0)\,y' + y'(x)\int\limits_0^x \gamma F(\xi)\,d\xi = -(\alpha y'')'.$$

Führt man nun das Gewicht des Stabes von unten bis zur Stelle x ein:

$$G(x) = \int\limits_x^l \gamma F(\xi)\,d\xi = G_0 - \int\limits_0^x \gamma F(\xi)\,d\xi,$$

so folgt

$$(1{\cdot}4)\qquad (\alpha y'')' + P y' - G(x)\cdot y' = 0.$$

Nochmalige Differentiation erzeugt die sog. „selbstadjungierte" Gestalt (Erklärung in 4·3) der Differentialgleichung

$$(1{\cdot}5)\qquad (\alpha y'')'' - (G y')' = -P y''.$$

Hierbei ist P wieder der Eigenwert λ. Zu dieser Differentialgleichung vierter Ordnung treten die vier Randbedingungen (die letzte Bedingung folgt aus (1·4) für $x = l$)

$$y(0) = 0, \qquad y''(0) = 0,$$
$$y'(l) = 0, \qquad (\alpha y'')'_{x=l} = 0.$$

1·4. Elastisch gebetteter Druckstab. Ein durch eine axiale Druckkraft der Größe P beanspruchter Stab der Länge l liege auf einer elastisch nachgiebigen Unterlage, z. B. eine Eisenbahnschiene. Wir machen die „WINKLERsche Annahme", daß bei Einsenkung um das Stück y die von der Unterlage pro Längeneinheit ausgeübte Kraft $p(x)$ der Senkung y proportional ist, also

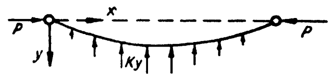


Abb. 1·5. Elastisch gebetteter Druckstab.

$$p(x) = K y.$$

K heißt die Bettungsziffer. Dann lautet bei einer kleinen Ausknickung (Abb. 1·5) die Gleichung der elastischen Linie

$$M = P y + \int\limits_0^x K y(\xi)\,(x - \xi)\,d\xi = -\alpha y''.$$

Differentiation liefert:

$$P y' + \int\limits_0^x K y(\xi)\,d\xi = -(\alpha y'')'$$

und eine zweite Differentiation ergibt als Differentialgleichung des Problems

$$(1{\cdot}6)\qquad (\alpha y'')'' + K y = -P y''.$$

Die Randbedingungen lauten bei gelenkiger Lagerung:

$$y(0) = y(l) = 0,$$
$$y''(0) = y''(l) = 0.$$

1·5. Auskippen eines auf Biegung beanspruchten Trägers[1]). Abb. 1·6 zeigt einen einseitig eingespannten, am anderen Ende eine Last P tragenden, *hochkant* gestellten Träger, d. h. es sei das Flächenträgheitsmoment J_y groß gegenüber J_z, also $J_y \gg J_z$. Dabei ist ein x, y, z-Achsensystem so in den Träger gelegt, daß die x-Achse in die Trägerachse vor der Verformung, die z-Achse in die Richtung der Belastung P fällt und y die Seitenauslenkungen mißt.

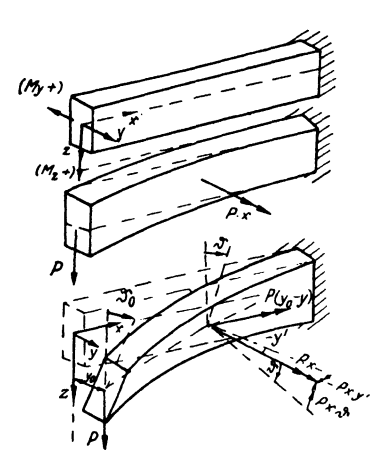


Abb. 1·6. Seitliches Auskippen eines durch eine Einzellast P auf Biegung beanspruchten, hochkant gestellten Trägers.

Ist die Last P klein, so tritt nur Biegung ein, überschreitet jedoch die Last P einen bestimmten kritischen Wert, die „Kipplast", so überlagert sich dieser Biegung ein seitliches Auskippen: Biegung um die y- und z-Achse und Verdrehung, wie man es z. B. bequem bei einer Reißschiene beobachten kann. Zur Ermittlung der Kipplast betrachten wir ein schwaches Auskippen, also geringe Seitenabweichungen y und kleine Drehwinkel ϑ.

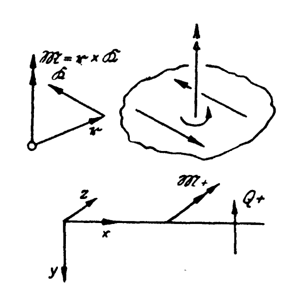


Abb. 1·7. Vorzeichenfestsetzungen für Biegemoment und Querkraft.

Es ist hierbei nötig, genau auf die Vorzeichen zu achten. Wir wiederholen kurz einige der im folgenden gebrauchten Vorzeichenfestsetzungen: Das Moment $\mathfrak{M}$ einer Kraft $\mathfrak{K}$ wird als Vektor eingeführt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}.$$

In den Abbildungen werden Momentenvektoren zum Unterschiede von Kraftvektoren stets durch zwei Pfeile gekennzeichnet. Die Drehwirkung eines Momentes ist gleich der eines gleichwertigen Kräftepaares. Bei der Biegung (rechtshändiges Achsensystem

[1]) L. Prandtl, Dissertation, München 1899. A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II, 2. Aufl. München und Berlin 1928, S. 323—352. K. Federhofer, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926) 43. Handbuch der Physik, Bd. VI, Berlin 1928, S. 284.

x, y, z wie in Abb. 1·7) wird das Biegemoment in der z-Richtung als positiv, die Querkraft in der negativen y-Richtung als positiv gezählt. Zufolge dieser Festsetzungen werden Biegemomentenvektoren M_z (Biegung in der x, y-Ebene) in der positiven z-Richtung positiv gezählt, dagegen Momentenvektoren M_y (Biegung in der x, z-Ebene) in der negativen y-Richtung positiv gezählt, wie es in Abb. 1·6 angedeutet ist. (Die x, y, z-Achsen folgen in dem gleichen Sinne aufeinander wie $x, z, -y$.)

Dann lauten die Gleichungen der elastischen Linie

$$M_y = -\alpha_y z'', \qquad M_z = -\alpha_z y''. \tag{1·7}$$

Dabei ist $\alpha_y = EJ_y$, $\alpha_z = EJ_z$, und J_y, J_z bedeuten die Flächenträgheitsmomente des Querschnittes bezüglich der y- und z-Achse. Mit der obigen Voraussetzung $J_y \gg J_z$ stellen wir die folgende vereinfachte Überlegung an.

Das Moment der Kraft P hat die beiden Komponenten Px und $P(y_0-y)$ in y- bzw. x-Richtung (Abb. 1·6). Die Komponente $P(y_0-y)$ darf, weil klein, in Stabrichtung angenommen werden. Dagegen muß Px, weil von endlicher Größe, in Komponenten in Richtung der neuen (verformten) Stabachse und senkrecht dazu zerlegt werden. Die Komponente von Px in der neuen Stabrichtung ist $-Pxy'$ (Abb. 1·6) und in der neuen Stabhochachse $Px\vartheta$. Man hat also als Biegegleichung:

$$-\alpha_z y'' = -Px\vartheta.$$

Hierzu kommt zufolge der Komponente des Momentes in der Stabrichtung noch eine Torsionsgleichung, die mit C als Torsionssteifigkeit im allgemeinen lautet:

Torsionsmoment = Torsionssteifigkeit mal spezifischer Verdrehung[1]).

(Spezifische Verdrehung heißt Verdrehung pro Längeneinheit und ist bei beliebig veränderlichem $\vartheta(x)$ durch $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dx}$ gegeben.) Also hat man hier

$$P(y_0-y) + Pxy' = -C\vartheta'.$$

Diese Gleichung differenziert ergibt

$$-Py' + Py' + Pxy'' = -(C\vartheta')'.$$

Mit Hilfe der Biegegleichung kann man y'' eliminieren, und es folgt als Differentialgleichung des Problems

$$-(C\vartheta')' = \frac{(Px)^2\vartheta}{\alpha_z} \tag{1·8}$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \vartheta(l) &= 0 \quad \text{(an der Einspannung kein Drehwinkel)}, \\ \vartheta'(0) &= 0 \quad \text{(am freien Ende kein Moment)}. \end{aligned} \tag{1·9}$$

Hierbei sind C und α_z gegebene Funktionen von x, P^2 ist der Eigenwert λ.

---

[1]) C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 116.

Die genauere, auch das andere Flächenträgheitsmoment J_z berücksichtigende Durchführung ergibt für ϑ die Differentialgleichung

$$-(C\vartheta')' = \frac{\alpha_y - \alpha_z}{\alpha_y \alpha_z}(P x)^2 \vartheta.$$

Bei den vorher behandelten Fragen ließen sich die Eigenwertaufgaben wenigstens für Stäbe konstanten Querschnittes leicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen lösen. Hier haben wir eine Differentialgleichung, die sich selbst bei Stäben konstanten Querschnittes nicht elementar in geschlossener Form lösen läßt, sondern auf Zylinderfunktionen führt[1])

In der Gleichung (1·8) ist $P \cdot x$ das Biegemoment $M(x)$; bei anderen Belastungen ist an dessen Stelle das entsprechende Biegemoment zu setzen. Bei irgendeiner Lastverteilung hat man also die Differentialgleichung:

$$(1 \cdot 10) \qquad -(C\vartheta')' = \frac{[M(x)]^2 \vartheta}{\alpha_z}.$$

1·6. Torsion und Auskippen von Trägern mit I-Querschnitt. Ist der in 1·5 betrachtete Stab ein Doppel-T-Träger, so entsteht an Stelle einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (1·8) eine solche vierter Ordnung[2]). Es ist dann das Torsionsmoment nicht mehr gleich $C\vartheta'$, sondern es wird durch ein Glied dritter Ordnung ergänzt. Bei einem I-Träger ist eine Verdrehung eines herausgegriffenen Stabelementes (Abb. 1·8) mit einer Biegung der Flanschen verbunden; bei einer Drehung des Querschnittes um den kleinen Winkel ϑ verschiebt sich der Flanschenschwerpunkt um die Strecke $y = \frac{h}{2}\vartheta$, wobei h die Entfernung der beiden Flanschenschwerpunkte ist. Ist ϑ

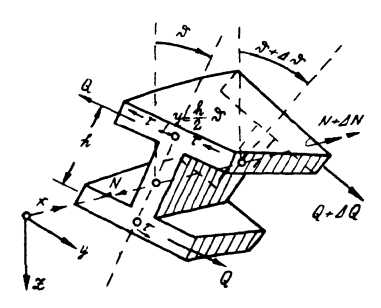


Abb. 1·8. Torsion eines Elementes von einem Träger mit I-Querschnitt.

nicht konstant, sondern irgendeine Funktion von x, so ist dies gleichbedeutend mit Biegung der Flanschen um den Steg des Trägers, also „um die hohe Kante“. In die Rechnung geht somit das Trägheitsmoment $\frac{1}{E}\alpha_f$ der Flanschen um die z-Achse, d. h. um seine kleine Achse, ein. Mit

[1]) Die Durchführung findet sich (auch für andere Lagerungsarten und Belastungsfälle) bei L. PRANDTL, Kipperscheinungen, ein Fall von instabilem elastischem Gleichgewicht, Dissertation, München 1899, S. 16ff.

[2]) A. und L. FÖPPL, Drang und Zwang, Bd. II, 2. Aufl. München und Berlin 1928, S. 339.

dieser Flanschenbiegung sind Querkräfte $Q = -(\varkappa_f y'')'$ verbunden, die ein Moment N ergeben, das in die gleiche Richtung wie das Torsionsmoment fällt. Die genaue Durchführung zeigt, daß bei der Torsion von I-Trägern das Torsionsmoment $C\vartheta'$ durch

$$-\frac{h^2}{2}(\alpha_f \vartheta'')' + C\vartheta' \tag{1·11}$$

zu ersetzen ist.

Beim Auskippen eines Trägers vom I-Querschnitt ist dann die Kipp gleichung (1·10) zu ersetzen durch die Differentialgleichung

$$-(C\vartheta')' + \frac{h^2}{2}(\varkappa_f \vartheta'')'' = \frac{[M(x)]^2 \vartheta}{\alpha_z}. \tag{1·12}$$

Da die Ordnung dieser Gleichung um 2 höher ist als die Ordnung von (1·10), muß man noch zwei weitere Randbedingungen hinzunehmen. Bei dem in 1·5 herausgegriffenen Fall einer Einzellast am freien Ende $x = 0$ hat man jetzt an Stelle von (1·9) die Randbedingungen

$$\left\{\begin{array}{l} \vartheta(l) = 0, \quad \vartheta''(0) = 0 \ (\text{wegen } y'' = 0), \\ \vartheta'(l) = 0 \ (\text{eingespannter Flansch, also } y' = 0), \\ \left[-C\vartheta' + \frac{h^2}{2}(\alpha_f \vartheta'')'\right]_{x=0} = 0 \ (\text{Torsionsmoment} = 0 \text{ für } x = 0). \end{array}\right. \tag{1·13}$$

1·7. Welle mit Druck und Torsion [1]). Man kann einen Draht oder eine Welle der Länge l durch ein genügend großes Drehmoment zu einem Ausknicken in Gestalt einer Schraubenlinie veranlassen, d. h. bei steigendem Torsionsmoment gibt es erst nur Verdrehung, dann, von einem bestimmten „kritischen" Torsionsmoment M an, verformt sich die Achse schraubenlinienförmig. Ist die Welle noch einer axialen Druckkraft P ausgesetzt (Abb. 1·9), so tritt diese Schraubenverformung eher, d. h. bereits bei einem kleineren Wert des kritischen Torsionsmomentes M ein.

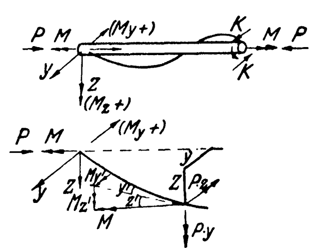


Abb. 1·9. Welle unter Druck- und Torsionsbeanspruchung.

Wir betrachten die Welle in einem schwach ausgeknickten Zustand, d. h. bei kleinem y und z. Die Momente $P \cdot z$ und $P \cdot y$ sind klein. Das Drehmoment M dagegen ist von endlicher Größe und muß in die Komponenten $M y'$ und $M z'$ nach den

---

[1]) J. Ratzersdorfer, Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien 1936, S. 35. C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 545.

Achsenrichtungen (Abb. 1·9) zerlegt werden. Man hat daher nach den Vorzeichenfestsetzungen von 1·5 (vgl. Abb. 1·7) die Biegegleichungen:

$$-\alpha z'' = Pz - My',$$
$$-\alpha y'' = Py + Mz'.$$

Dabei ist $\alpha_y = \alpha_z$ angenommen und einfach α als Biegesteifigkeit geschrieben; die erste Gleichung ergibt differenziert:

$$(-\alpha z'')' = Pz' - My'' = Pz' + \frac{MP}{\alpha} y + \frac{M^2}{\alpha} z'. \tag{1·14}$$

Multiplikation mit α und nochmalige Differentiation

$$-[\alpha(\alpha z'')']' = P(\alpha z')' + M^2 z'' + MPy'$$

ergibt die Differentialgleichung

$$[\alpha(\alpha z'')']' + P[(\alpha z')' + \alpha z''] + M^2 z'' + P^2 z = 0$$

mit den Randbedingungen

$$z(0) = z(l) = 0, \qquad \left[(\alpha z'')' + Pz' + \frac{M^2}{\alpha} z'\right]_{x=0 \text{ und } l} = 0$$

(die beiden letzten Gleichungen folgen aus der Gleichung (1·14) für $y = 0$).

Wenn die Welle konstanten Querschnitt hat, also $\alpha = \text{const}$ ist, lautet die Differentialgleichung

$$z^{\mathrm{IV}} + \frac{2P}{\alpha} z'' + \frac{M^2}{\alpha^2} z'' + \frac{P^2}{\alpha^2} z = 0. \tag{1·15}$$

Wenn M gegeben und die kritische axiale Druckkraft P gesucht ist, tritt der Eigenwert quadratisch in der Differentialgleichung auf. Wenn dagegen die axiale Druckkraft P gegeben und das kritische Moment M gesucht ist, tritt der Eigenwert wie bisher linear auf. Ist kein Axialdruck vorhanden ($P = 0$), so läßt sich die Differentialgleichung auf die selbstadjungierte Gestalt bringen

$$(\alpha z'')'' = -M^2 \left(\frac{z'}{\alpha}\right)'. \tag{1·16}$$

Als weitere Besonderheit ist das Auftreten des Eigenwertes in den Randbedingungen zu erwähnen.

1·8. Kreisbogenknickung[1]). Ein gekrümmter dünner Stab von konstantem Querschnitt, dessen Achse ein Kreisbogen mit dem Halbmesser a und dem Zentriwinkel 2β sei, stehe unter dem gleichförmigen einseitigen Druck p von außen. Es soll als ein einfacher Fall der Kreisbogenknickung der kritische Druck berechnet werden, unter dem der Stab in seiner Ebene ausknicken kann. Dabei wird die Annahme gemacht, daß der Druck auch nach der Verformung senkrecht auf der verzerrten Mittellinie stehe.

---

[1]) J. RATZERSDORFER, Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien 1936, S. 305ff.

Nach Einführung von Polarkoordinaten r, φ (Abb. 1·10) kann die neue Lage durch Angabe der als klein betrachteten Verschiebungen v, w, die ein Teilchen A in der tangentialen und radialen Richtung erfährt, gekennzeichnet werden. Die neue Lage A' ist in rechtwinkligen Koordinaten x, y gegeben durch

$$x = (a - w)\sin\varphi + v\cos\varphi,$$
$$y = (a - w)\cos\varphi - v\sin\varphi.$$

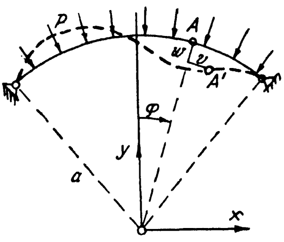


Abb. 1·10. Knickung eines Kreisbogens in seiner Ebene durch äußeren Druck.

Die Verschiebungen v bzw. w bewirken die tangentialen Dehnungen $\frac{1}{a}\frac{dv}{d\varphi}$ bzw. $-\frac{w}{a}$. Wir machen nun weiter die Annahme der Dehnungslosigkeit der Mittellinie, d. h. die gesamte tangentiale Dehnung ε_t sei 0,

$$a\,\varepsilon_t = \frac{dv}{d\varphi} - w = 0, \qquad \text{oder} \qquad w = \frac{dv}{d\varphi}.$$

Für die Biegung schwach gekrümmter Stäbe gilt nun das Gesetz: Biegemoment M = Biegesteifigkeit α mal Krümmungsänderung K^*. Dabei ist $K^* = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a}$ die Differenz der neuen und alten Krümmung. Die neue Krümmung K berechnet sich nach einer bekannten Formel zu

$$(1{\cdot}17) \qquad K = \frac{1}{\varrho} = \frac{-x'y'' + y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

wobei Striche Ableitungen nach der Größe $s = a\cdot\varphi$ bedeuten (s = alte Bogenlänge). Bei Vernachlässigung quadratischer Glieder in v, w erhält man mit Benutzung von $w = av'$

$$\begin{aligned}
a x' &= a\cos\varphi - (v + aw')\sin\varphi,\\
a y' &= -a\sin\varphi - (v + aw')\cos\varphi,\\
a^2 x'' &= (-a - av' - a^2w'')\sin\varphi - (v + aw')\cos\varphi,\\
a^2 y'' &= (-a - av' - a^2w'')\cos\varphi + (v + aw')\sin\varphi,\\
x'^2 + y'^2 &= 1,\\
a^3(y'x'' - x'y'') &= a^2(1 + v' + aw'')
\end{aligned}$$

und damit wegen $w = av'$

$$K = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}(1 + v' + a^2v''').$$

Mit der Krümmungsänderung

$$K^* = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a} = \frac{v'}{a} + av'''$$

ergibt sich für das Biegemoment

$$(1{\cdot}18) \qquad M = \alpha K^* = \frac{\alpha}{a}(v' + a^2v''').$$

Nach dieser geometrischen Vorbetrachtung greifen wir jetzt ein Stabelement der Länge Δs heraus und stellen die Gleichgewichtsbedingungen für die an dem Element angreifenden Kräfte und Momente auf. Es wirken Querkräfte Q, Normalkräfte N, Biegemomente M und die äußere Belastung $p\Delta s$. Es sind Q, N, M in der aus der Abb. 1·11 ersichtlichen Pfeilrichtung als positiv gezählt; z. B. vergrößert ein positives Moment die Krümmung. Es sei ψ der Winkel der Tangente der verformten Stabachse gegen eine raumfeste Richtung und somit $\Delta\psi$ der Winkel, den die zu den Endquerschnitten des herausgegriffenen Elementes gehörigen Normalen miteinander bilden. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern bei kleinem $\Delta\psi$ für die radialen Komponenten aller Kräfte

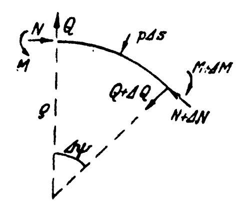


Abb. 1·11. Kräfte und Momente an einem Element eines Kreisbogenträgers.

$$Q - p\Delta s - (Q + \Delta Q) + N\frac{\Delta\psi}{2} + (N + \Delta N)\frac{\Delta\psi}{2} = 0,$$

für die tangentialen Komponenten

$$-Q\frac{\Delta\psi}{2} + N - (N + \Delta N) - (Q + \Delta Q)\frac{\Delta\psi}{2} = 0$$

und für die Momente (etwa bezüglich des Schnittpunktes der Tangenten an die Stabachse in den Endpunkten des Stabelementes)

$$Q\frac{\Delta s}{2} + (Q + \Delta Q)\frac{\Delta s}{2} - M + (M + \Delta M) = 0.$$

Beim Grenzübergang $\Delta\psi \to 0$ folgt daraus wegen $K = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\psi}{ds}$

$$-Q' - p + NK = 0, \tag{1·19}$$

$$-QK - N' = 0, \tag{1·20}$$

$$Q + M' = 0. \tag{1·21}$$

Mit $M = \alpha K^*$ folgt aus (1·21) $Q = -\alpha(K^*)' = -\alpha K'$, da sich K und K^* nur um eine Konstante unterscheiden, sodann $N = \frac{p - \alpha K''}{K}$ aus (1·19) und weiter aus (1·20)

$$KK''' - K'K'' + \frac{p}{\alpha}K' + K^3K' = 0. \tag{1·22}$$

Drückt man schließlich noch die Krümmung K durch die Verschiebung v aus und behält nur die in v linearen Glieder bei, so erhält man als gesuchte Gleichung die Differentialgleichung sechster Ordnung

$$v^{\mathrm{VI}} + \frac{2}{a^2}v^{\mathrm{IV}} + \frac{v''}{a^4} + \frac{pa}{\alpha}\left(v^{\mathrm{IV}} + \frac{v''}{a^2}\right) = 0 \tag{1·23}$$

Als Randbedingungen treten hinzu:

an einem gelenkigen Ende $v = w = M = 0$ oder $v = v' = v''' = 0$

und an einer Einspannung $v = w = w' = 0$ oder $v = v' = v'' = 0$.

Der Eigenwert ist hier der kritische Druck p.

§ 2. Schwingungsaufgaben.

2·1. Schwingung eines frei herabhängenden Seiles[1]. Ein vollkommen biegsames unausdehnbares Seil der Länge l, welches an einem Ende aufgehängt ist und der Schwerkraft unterliegt, führe kleine Schwingungen aus. In den Aufhängepunkt wird ein x-y-Achsensystem gelegt, die x-Achse zeige nach abwärts (Abb. 2·1). Die Schwingungen mögen in einer Ebene, der x, y-Ebene, erfolgen, die seitlichen Auslenkungen y und die Schrägstellungswinkel y' werden als klein angesehen ($\operatorname{arctg} y' \approx y'$). Auf ein herausgegriffenes Seilelement der Länge Δx wirken die Seilkräfte S und $S + \Delta S$, die Schwerkraft $\varrho g F \Delta x$ und (nach dem D'ALEMBERTschen Prinzip) die Trägheitskraft $-\varrho F \Delta x \ddot{y}$ (mit ϱ als Dichte, F Querschnittsfläche, g Fallbeschleunigung, Striche bedeuten Ableitungen nach der Länge x, Punkte nach der Zeit t). Die Seilkräfte werden in horizontale und vertikale Komponenten zerlegt, und man erhält als Gleichgewichtsbedingungen, wenn man nach der TAYLORschen Formel ΔS durch $S' \cdot \Delta x$ ersetzt,

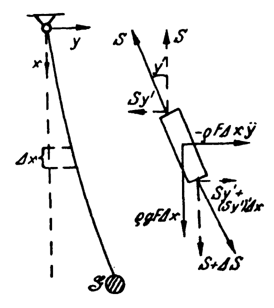


Abb. 2·1. Kleine Schwingungen eines frei herabhängenden, vollkommen biegsamen Seiles.

$$S' \Delta x + \varrho g F \Delta x = 0,$$
$$(S y')' - \varrho F \ddot{y} = 0$$

oder

$$S' = -\varrho g F, \tag{2·1}$$

$$(S y')' = \varrho F \ddot{y}. \tag{2·2}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen besagt, daß die Abnahme der Seilkraft mit wachsendem x dem Eigengewicht des Seiles entspricht. Man kann ohne weiteres den Fall mit erfassen, daß das Seil unten noch eine Einzelmasse M

---

[1]) G. HAMEL, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, S. 536—539.

mit dem Gewicht $G = Mg$ trägt. Dann ist die Seilkraft an einer Stelle x gleich der Summe aus dem Gewicht des unterhalb dieser Stelle befindlichen Seiles und dem angehängten Gewicht G. Bei einem homogenen Seil (ϱ und F konstant) ist z. B.

$$S = G + \varrho g F (l - x).$$

Die Seilkraft S ist also als bekannt anzusehen. Damit ist (2·2) bereits die Bewegungsgleichung des Seiles; sie ist eine partielle Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $y(x, t)$. Für das homogene, belastete Seil lautet sie

$$[(G + \varrho g F (l - x))\, y']' = \varrho F \ddot{y}. \tag{2·3}$$

Von der Gesamtheit der möglichen Bewegungsvorgänge interessieren wir uns jetzt für die synchronen Schwingungen, die sogenannten „Eigenschwingungen", d. h. wir fragen, ob die partielle Differentialgleichung Lösungen der Form

$$y(x, t) = Y(x) \cdot \cos \omega (t - t_0) \tag{2·4}$$

mit t_0 als Konstanten besitzt. Bei einem solchen Bewegungsvorgang schwingen alle Seilteilchen mit derselben Kreisfrequenz ω und einheitlicher Phase, aber mit verschiedenen Amplituden Y. Mit dem Ansatz (2·4) wird

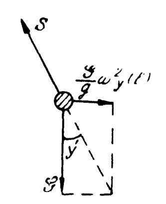


Abb. 2·2. Zur Herleitung der Randbedingung beim schwingenden Seil mit Endmasse.

$$\ddot{y} = -\omega^2 y,$$

und man erhält die gewöhnliche Differentialgleichung[1])

$$[(G + \varrho g F (l - x))\, y']' = -\varrho F \omega^2 \cdot y. \tag{2·5}$$

Sie läßt sich auch für konstantes $\varrho \cdot F$ nicht mehr elementar integrieren wegen des Faktors $(l - x)$ und führt auf BESSELsche Funktionen. Die Randbedingungen sind

$$\begin{cases} 1)\; y(0) = 0, \\ 2)\; y'(l) = \dfrac{\omega^2}{g}\, y(l). \end{cases} \tag{2·6}$$

Die zweite Randbedingung entsteht, indem man das Kräftegleichgewicht am angehängten Gewicht G betrachtet (Abb. 2·2); Schwerkraft und Trägheitskraft müssen eine Resultierende ergeben, die der Seilkraft das Gleichgewicht hält, also unter dem Winkel y' gegen die Vertikale geneigt ist, d. h.

$$y' = \frac{G}{g}\, y(l)\, \frac{\omega^2}{G}.$$

[1]) Man kann in (2·5) y durch Y ersetzen. Sowohl die Amplitudenfunktion $Y(x)$, als auch die Schwingungsfunktion $y(x, t)$ bei beliebigem festem t (also in jedem Zeitaugenblick) genügen der Gleichung (2·5). Für $y(x, t)$ wird hier kurz $y(x)$ geschrieben.

Die Randbedingung ist also von der Größe von G unabhängig und gilt auch für $G = 0$. (An Stelle von 2) könnte man auch $y''(l) = 0$ schreiben.)

Die Kreisfrequenzen ω sind gesucht. Man fragt also nach denjenigen Werten des Parameters ω, für die die Differentialgleichung (2·5) mit den Randbedingungen (2·6) eine nicht identisch verschwindende (eine „nichttriviale") Lösung y besitzt. Es liegt wieder ein Eigenwertproblem wie in § 1 vor, die Größe ω^2 ist der Eigenwert λ; wie in 1·3 besteht hier die Besonderheit, daß der Eigenwert in den Randbedingungen (nämlich in der zweiten Gleichung von (2·6)) auftritt.

Die Eigenschwingungen haben eine besondere Bedeutung für die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2·3). Man weiß, daß es eine Grundschwingung, d. h. eine Eigenschwingung mit der niedrigsten Kreisfrequenz ω_1, und eine Folge von Oberschwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_2, \omega_3, \ldots$ gibt. Die ω_i seien der Größe nach geordnet; zu jeder Kreisfrequenz ω_i gibt es eine bestimmte zugehörige (bis auf einen konstanten Faktor festgelegte) Eigenfunktion y_i. Da die partielle Differentialgleichung (2·3) linear und homogen ist, ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung, man kann mehrere und sogar unendlich viele Lösungen linear kombinieren („überlagern"), d. h. es ist auch

$$y(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu(x)\,(A_\nu \cos \omega_\nu t + B_\nu \sin \omega_\nu t)$$

eine Lösung bei beliebigen Konstanten A_ν, B_ν, sofern nur die A_ν, B_ν so stark abnehmen, daß die durch zweimaliges gliedweises Differenzieren nach x und t gebildeten Reihen gleichmäßig konvergieren. Diese Lösung nimmt für $t = 0$ gewisse Anfangswerte an:

$$(2\cdot 7) \qquad \left\{ \begin{aligned} g(x) &= y(x, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu y_\nu(x), \\ h(x) &= \dot{y}(x, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \omega_\nu y_\nu(x). \end{aligned} \right.$$

Wenn man nun für das Eigenwertproblem den sogenannten Entwicklungssatz beweisen kann, d. h. wenn man beweisen kann, daß man eine „willkürliche" Funktion $\varphi(x)$ nach den Eigenfunktionen $y_i(x)$ entwickeln kann, daß es also hier z. B. zu beliebig gegebener Funktion $g(x)$ Konstanten A_ν und zur beliebig gegebenen Funktion $h(x)$ Konstanten $B_\nu \omega_\nu$ gibt, so daß die Beziehungen (2·7) bestehen, dann ist gezeigt, daß die unendliche Reihe für $y(x, t)$ die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung darstellt; denn eine beliebig herausgegriffene Lösung der partiellen Differentialgleichung kann durch ihre „Anfangswerte" $g(x)$ und $h(x)$ gekenn-

zeichnet werden. Ein beliebiger Bewegungsvorgang des Seiles kann also dann stets als Überlagerung aus den Eigenschwingungen dargestellt werden.

2·2. Torsionsschwingungen von Stäben. Ein Stab der Länge l führe Torsionsschwingungen um seine Achse aus; er sei etwa einseitig eingespannt, am anderen Ende frei, besitze eine geradlinige Achse, aber nicht notwendig konstanten Querschnitt. In die Stabachse im Ruhezustand wird eine x-Achse gelegt und die Koordinate x vom freien Ende aus gezählt. $\vartheta = \vartheta(x, t)$ sei der Winkel, um den sich bei der Schwingung der Querschnitt an der Stelle x zur Zeit t aus der Ruhelage herausgedreht hat. (Davon, daß alle Querschnitte mit Ausnahme von Kreis- und Kreisringquerschnitt bei der Torsion nicht eben bleiben, sondern sich verwölben, wollen wir hier absehen.) Bezeichnet $C = C(x)$ wie in 1·5 die Torsionssteifigkeit des Stabes an der Stelle x, so ist das Torsionsmoment gegeben durch

$$M_t = C\frac{d\vartheta}{dx} = C\vartheta'$$

Bei der Torsionsschwingung wirken auf ein einzelnes Stabelement die Momente (Abb. 2·3), links M_t, rechts $M_t + \Delta M_t$, so daß ΔM_t zur Drehbeschleunigung des Stabelementes zur Verfügung steht. Also ist mit ϱ als Dichte und J_p als polarem Flächenträgheitsmoment des Querschnittes an der Stelle x

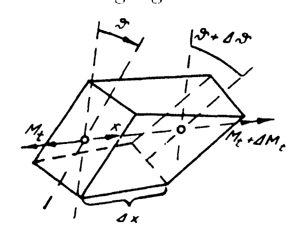


Abb. 2·3. Momente an einem Stabelement bei Torsionsschwingungen.

$$\Delta M_t = J_p \varrho \Delta x \ddot{\vartheta},$$

und damit erhält man für $\vartheta(x, t)$ als Bewegungsgleichung die partielle Differentialgleichung

$$M_t' = (C\vartheta')' = \varrho J_p \ddot{\vartheta}. \tag{2·8}$$

Wieder mit dem Ansatz für Eigenschwingungen wie bei (2·4)

$$\vartheta(x, t) = D(x) \cos \omega t$$

erhält man mit $\ddot{\vartheta} = -\omega^2\vartheta$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-(C\vartheta')' = \omega^2 \varrho J_p \vartheta \tag{2·9}$$

mit den Randbedingungen

$\vartheta(l) = 0$ an der Einspannstelle keine Verdrehung,

$\vartheta'(0) = 0$ am freien Ende kein Drehmoment.

Bei einem Träger mit I-Querschnitt erhöht sich wie in 1·6 die Ordnung der Differentialgleichung; man hat wie in (1·11) das Glied $C\vartheta'$ durch $-\frac{h^2}{2}(\alpha_f\vartheta'')'$ zu ergänzen, und (2·9) geht über in

$$\frac{h^2}{2}(\alpha_f\vartheta'')'' - (C\vartheta')' = \varrho J_p \omega^2 \vartheta \tag{2·10}$$

mit denselben Randbedingungen wie in (1·13)

$$\vartheta(l) = 0,$$
$$\vartheta'(l) = 0,$$
$$\vartheta''(0) = 0,$$
$$\left[-\frac{h^2}{2}(\alpha_1\vartheta'')' + C\vartheta'\right]_{x=0} = 0.$$

Die Bedingung $\vartheta'(l) = 0$ ist erzwungen durch die Flanschenbiegung, denn für die eingespannten Flanschen gilt $y' = 0$, vgl. 1·6. Beim Träger ohne Flanschen ist im allgemeinen $\vartheta'(l) \neq 0$.

2·3. Biegeschwingungen eines Stabes. Ein Stab der Länge l mit geradliniger Achse, der irgendwie gelagert sei, z. B. einseitig eingespannt wie in Abb. 2·4, kann außer den in 2·2 untersuchten Torsionsschwingungen auch Biegeschwingungen ausführen. Eine x-Achse werde in die Stabachse im Ruhezustand gelegt, und mit y werden die, hier wieder als klein vorausgesetzten, Auslenkungen aus der Ruhelage bezeichnet. Wir fassen zunächst den Schwingungsvorgang so auf, als ob jedes Stabelement als starres Teilchen parallel zur y-Achse schwingt, und sehen also von allen Nebeneinflüssen ab, die sich daraus ergeben, daß ja in Wirklichkeit durch die Schrägstellung der elastischen Linie beim Schwingungsvorgang jedes Stabelement auch Drehungen und damit Drehbeschleunigungen erfährt, daß das Stabelement seine Gestalt nicht beibehält und infolge der Winkeländerungen Schubspannungen auftreten usw. Wir fassen dann mit den üblichen Bezeichnungen (Dichte ϱ, Querschnitt F, Biegesteifigkeit α) die Trägheitskräfte $-\varrho F\ddot{y}$ als Lasten p auf und bekommen aus der bekannten Biegegleichung des Stabes

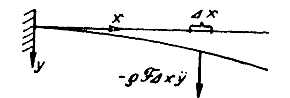


Abb. 2·4. Biegeschwingung eines einseitig eingespannten Stabes.

$$(\alpha y'')'' = p$$

unmittelbar die Bewegungsgleichung

(2·11) $$(\alpha y'')'' = -\varrho F\ddot{y}.$$

Mit dem Ansatz für Eigenschwingungen

$$y = y(x, t) = Y(x)\cos\omega t$$

wird daraus die gewöhnliche Differentialgleichung

(2·12) $$(\alpha y'')'' = \varrho F\omega^2 y.$$

Je nach der Lagerung des Stabes erhält man verschiedene Randbedingungen, wir greifen einige Beispiele heraus, vgl. Abb. 2·5.

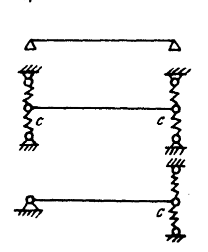


Abb. 2·5. Verschiedene Lagerungen eines schwingenden Stabes.

1. Stab links eingespannt, rechts frei:

$$y(0) = y'(0) = 0,$$
$$y''(l) = y'''(l) = 0.$$

2. Stab beiderseits gelenkig gelagert:

$$y(0) = y(l) = 0,$$
$$y''(0) = y''(l) = 0.$$

3. Stab beiderseits elastisch gestützt.

Hier tritt bei einer Senkung um das Stück $y(0)$ links die Querkraft $Q = c\,y(0)$ auf (c als Federkonstante), also ist am linken Ende

$$Q = -(\alpha y'')'_{x=0} = c\,y(0).$$

Am rechten Ende lautet die Auflagerkraft $-Q = (\alpha y'')'_{x=l} = c\,y(l)$. Man hat also die Randbedingungen, wenn man die Stelle x nötigenfalls durch einen angehängten Index andeutet:

$$y''(0) = 0,$$
$$(\alpha y'')'_0 + c\,y(0) = 0,$$
$$y''(l) = 0,$$
$$(\alpha y'')'_l - c\,y(l) = 0.$$

4. Stab links gelenkig gelagert, rechts elastisch gestützt:

$$y(0) = y''(0) = 0,$$
$$y''(l) = 0,$$
$$(\alpha y'')'_l - c\,y(l) = 0.$$

2·4. Beispiel eines physikalischen Problems mit negativen Eigenwerten. Ist in den zuletzt genannten Lagerungsfällen 3 und 4 bei den Biegeschwingungen eines elastisch gestützten Stabes die Federkonstante c negativ (wirkt also bei kleinen Auslenkungen an den Enden eine die Auslenkung vergrössernde Kraft, die man sich physikalisch leicht realisieren kann), dann können negative Eigenwerte auftreten. Der leichteren Durchrechnung wegen nehmen wir nur eine Stütze als elastisch an und die andere als festes Gelenk. Ferner habe der Stab konstanten Querschnitt; dann geht Gleichung (2·12)

$$\alpha y^{\mathrm{IV}} = \varrho F \omega^2 y \tag{2·13}$$

mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{\varrho F \omega^2}{\alpha} = k^4 \tag{2·14}$$

über in

$$y^{\mathrm{IV}} = \lambda y = k^4 y. \tag{2·15}$$

Sie hat für $k \neq 0$ die allgemeine Lösung

$$y = A \sin kx + B \cos kx + C\,\mathrm{Sin}\,kx + D\,\mathrm{Cos}\,kx$$

mit A, B, C, D als willkürlichen Konstanten.

Die ersten beiden Randbedingungen

$$y(0) = B + D = 0,$$
$$y''(0) = k^2(-B + D) = 0$$

verlangen

$$B = D = 0.$$

Die beiden anderen Randbedingungen

$$y''(l) = 0,$$
$$y'''(l) - \frac{c}{\alpha}\, y(l) = 0$$

besagen mit $k \neq 0$

$$-A \sin kl + C\,\mathfrak{Sin}\,kl = 0,$$
$$A\left(-k^3 \cos kl - \frac{c}{\alpha} \sin kl\right) + C\left(k^3\,\mathfrak{Cof}\,kl - \frac{c}{\alpha}\,\mathfrak{Sin}\,kl\right) = 0.$$

Das sind zwei lineare homogene Gleichungen für A und C, die genau dann eine von $A = C = 0$ verschiedene Lösung haben, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} -\sin kl & \mathfrak{Sin}\,kl \\ -k^3 \cos kl - \frac{c}{\alpha} \sin kl & k^3\,\mathfrak{Cof}\,kl - \frac{c}{\alpha}\,\mathfrak{Sin}\,kl \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausrechnung dieser Determinante liefert nach Division durch $\sin kl\,\mathfrak{Sin}\,kl$ eine transzendente Gleichung für k (und damit zugleich für den Eigenwert λ):

$$(2{\cdot}16) \qquad \mathfrak{Ctg}\,kl - \operatorname{ctg} kl = 2\,\frac{c}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^3}.$$

Man sieht aus einer graphischen Darstellung der beiden Seiten dieser Gleichung, Abb. 2·6, daß sowohl für positives als auch für negatives c unendlich viele reelle Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{Ctg}\,kl - \operatorname{ctg} kl$ und $\frac{2c}{\alpha k^3}$ mit positiven k-Werten und damit nach (2·14) unendlich viele positive Eigenwerte λ existieren.

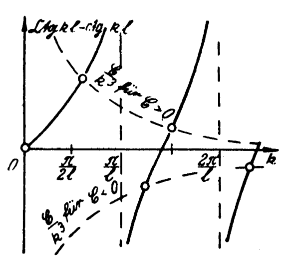


Abb. 2·5. Reelle Nullstellen der transzendenten Gleichung (2·16).

Gibt es aber auch negative Eigenwerte λ? Für $\lambda < 0$ setzen wir k nach (2·14) als vierte Wurzel einer negativen Zahl an als $k = s(1 + i)$ mit reellem s. Es sei weiterhin $l = 1$; Einsetzen von $k = s(1 + i)$ in (2·16) ergibt bei Benutzung von

$$\sin k = \sin s\,\mathfrak{Cof}\,s + i \cos s\,\mathfrak{Sin}\,s,$$
$$\cos k = \cos s\,\mathfrak{Cof}\,s - i \sin s\,\mathfrak{Sin}\,s,$$
$$\mathfrak{Sin}\,k = \cos s\,\mathfrak{Sin}\,s + i \sin s\,\mathfrak{Cof}\,s,$$
$$\mathfrak{Cof}\,k = \cos s\,\mathfrak{Cof}\,s + i \sin s\,\mathfrak{Sin}\,s$$

nach kurzer Umrechnung die neue Gleichung für s:

$$\frac{c}{2\alpha s^3} = \frac{\sin 2s - \mathfrak{Sin}\, 2s}{\mathfrak{Cos}\, 2s - \cos 2s}.$$

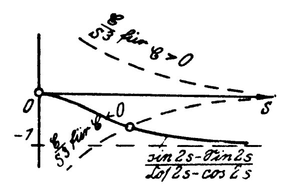


Abb. 2·7. Graphische Darstellung für komplexe Nullstellen der Gleichung (2·16).

Die graphische Darstellung der rechten Seite dieser Gleichung, Abb. 2·7, zeigt, daß man für positives c keinen reellen und für negatives c einen reellen Schnittpunkt s erhält.

Für $c < 0$ gibt es also einen negativen Eigenwert λ. Der zu diesem gehörige Bewegungsvorgang kann nicht als „Eigenschwingung", sondern höchstens als „Eigenbewegung" bezeichnet werden:

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega t = Y(x) \cos \sqrt{\frac{\lambda \alpha}{\varrho F}}\, t = Y(x)\, \mathfrak{Cos} \sqrt{\frac{-\lambda \alpha}{\varrho F}}\, t.$$

$y\,(x, t)$ hat also für ein negatives λ einen mit der Zeit anwachsenden Faktor. Den übrigen Eigenwerten λ, die positiv sind, entsprechen richtige Schwingungen; aber das betrachtete System ist instabil; eine etwa vorhandene noch so kleine Komponente der zum negativen Eigenwert gehörigen Eigenbewegung wächst mit der Zeit zu beliebig großen Werten an.

Nimmt man beide Enden des Stabes als elastisch gestützt an (Lagerungsart 3 in 2·3, Abb. 2·5), so erhält man mit $l = 1$ für k die transzendente Gleichung

$$\left(\mathfrak{Ctg}\, k - \operatorname{ctg} k - \frac{2c}{\alpha k^3}\right)\left(\operatorname{tg} k + \mathfrak{Tg}\, k - \frac{2c}{\alpha k^3}\right) = 0.$$

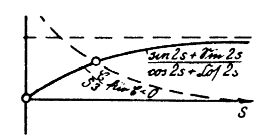


Abb. 2·8. Graphische Darstellung beim negativen Eigenwert des beiderseits elastisch gestützten schwingenden Stabes.

Der erste Faktor wurde oben bereits genauer untersucht, der zweite liefert wieder unendlich viele positive und für negatives c einen weiteren negativen Eigenwert, er ergibt für $k = s\,(1 + i)$ die Gleichung

$$-\frac{c}{2\alpha s^3} = \frac{\sin 2s + \mathfrak{Sin}\, 2s}{\cos 2s + \mathfrak{Cos}\, 2s}.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist in Abb. 2·8 graphisch dargestellt. Bei dieser Lagerungsart treten also für $c < 0$ zwei negative und unendlich viele positive Eigenwerte auf.

2·5. Stabschwingungen mit Berücksichtigung des Eigengewichtes. Die Biegeschwingungen eines einseitig eingespannten, senkrecht stehenden Stabes (z. B. eines hohen Schornsteines[1])) sollen unter den gleichen Verein-

[1]) M. G. Puwein, Beton und Eisen 39 (1940) 162.

fachungen wie in 2·3 besprochen werden. Eine x-Achse weise in die Stabachse senkrecht nach abwärts, die (kleinen) Seitenabweichungen werden mit y bezeichnet. In einer ausgelenkten Lage wirkt jetzt auf ein Stabelement außer der Trägheitskraft noch die Schwerkraft, Abb. 2·9, so daß das Biegemoment gegeben ist durch

$$M = -\alpha y'' = -\int_0^x [-\varrho F \ddot{y}(\xi)]\,(x - \xi)\,d\xi - \int_0^x \varrho g F [y(\xi) - y(x)]\,d\xi .$$

Differentiation ergibt

$$M' = -(\alpha y'')' = \int_0^x \varrho F \ddot{y}(\xi)\,d\xi + \int_0^x \varrho g F y'(x)\,d\xi .$$

Das zweite Integral hat den Wert $y'(x) \cdot G(x)$, wobei $G(x) = \int_0^x \varrho g F d\xi$ das Gewicht des Stabes vom oberen Ende bis zur Stelle x darstellt. Somit folgt bei nochmaliger Differentiation:

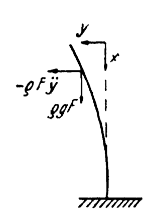


Abb. 2·9. Biegeschwingungen eines Stabes bei Berücksichtigung des Eigengewichtes.

(2·17) $$-(\alpha y'')'' = \varrho F \ddot{y} + (G y')'$$

oder wieder mit dem Ansatz (2·4) für Eigenschwingungen

(2·18) $$(\alpha y'')'' + (G y')' = \varrho F \omega^2 y .$$

Bei konstantem Querschnitt ist $G = \varrho F g x$, die Differentialgleichung hat also auch dann nicht konstante Koeffizienten, und die Ermittlung der Eigenwerte $\lambda = \omega^2$ ist nicht ohne weiteres in geschlossener Form möglich wie bei den Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Randbedingungen lauten

$$y(l) = y'(l) = 0, \qquad y''(0) = y'''(0) = 0 .$$

2·6. Kritische Drehzahl von Wellen mit Kreiselwirkung [1]). Als „fliegende Welle" bezeichnet man eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω umlaufende, einseitig eingespannte Welle, die am anderen, freien Ende eine Scheibe trägt. Bei solchen Wellen darf man bei der Berechnung der kritischen Drehzahlen die durch die Schrägstellung der Scheibe und der Wellenteilchen hervorgerufene Kreiselwirkung im allgemeinen nicht mehr vernachlässigen. Infolge der Schrägstellung der Scheibe ist die Drehachse nicht mehr Hauptträgheitsachse, der Drehimpuls J fällt daher nicht in die Richtung der Drehachse, sondern rotiert mit. Die Änderung des Drehimpulses, d. h. genauer die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ist dann gleich dem auf die Scheibe ausgeübten Moment.

---

[1]) C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 803 bis 806, 821.

Die Schrägstellung der Scheibe sei durch den kleinen Winkel $\varphi = y'$ gekennzeichnet. Die Scheibe habe die Trägheitsmomente A bezüglich ihrer Symmetrieachse und B bezüglich einer dazu senkrechten Achse. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezüglich dieser beiden Achsen sind dann, Abb. 2·10, $\omega \cos \varphi$ und $\omega \sin \varphi$ oder wegen der Kleinheit von φ gleich ω und $\omega\varphi$, die Komponenten des Drehimpulses sind $J_1 = A\omega$ und $J_2 = B\omega\varphi$. Aus diesen Komponenten läßt sich der gesamte Drehimpuls J konstruieren; die Endspitze dieses Pfeiles hat von der Drehachse den „Abstand"

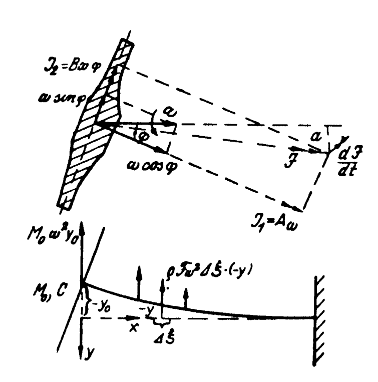


Abb. 2·10. Zur Herleitung der Differentialgleichung der fliegenden Welle.

$$a = J_1 \sin \varphi - J_2 \cos \varphi \approx J_1 \varphi - J_2 = (A - B)\,\omega\varphi = C\omega\varphi,$$

wo $C = A - B$ gesetzt ist. Wegen der gleichförmigen Rotation ist dann die zeitliche Ableitung

$$\frac{dJ}{dt} = \dot{J} = a\,\omega = C\,\omega^2 \varphi.$$

Das ist das von der Welle auf die Scheibe ausgeübte Moment[1]).

Das Moment von der Scheibe auf die Welle beträgt dann

$$M = - C\omega^2\varphi. \tag{2·19}$$

Ferner treten Fliehkräfte auf: $-m\ddot{y} = +m\omega^2 y$ mit $y(x, t) = Y(x) \cdot \cos \omega t$, wobei $m = \varrho F$ die Masse der Welle pro Längeneinheit ist. Ist M_0 die Masse der Scheibe und c die (C entsprechende) Differenz der Trägheitsmomente der Wellenteilchen pro Längeneinheit, so lautet das Biegemoment:

$$(2·20)\quad \left\{ \begin{aligned} M = -\alpha y'' = &-\underbrace{\int_0^x \varrho F \omega^2 \cdot y(\xi)(x-\xi)\,d\xi}_{\text{Fliehkraft der Welle,}} - \underbrace{M_0\omega^2 y_0 \cdot x}_{\text{der Scheibe}} \\ &- \underbrace{C\omega^2 \cdot y_0'}_{\text{Kreiselwirkung der Scheibe}} - \underbrace{\int_0^x c\,\omega^2 y'(\xi)\,d\xi}_{\text{Kreiselwirkung der Welle}}. \end{aligned} \right.$$

---

[1]) Dieser Momentenvektor steht senkrecht auf der durch ω, J_1 und J_2 festgelegten Ebene und ist in Abb. 2·10 als $\frac{dJ}{dt}$ perspektivisch eingezeichnet.

Differentiation ergibt:

$$(2{\cdot}21)\qquad M' = (-\alpha y'')' = -\int_0^x \varrho F \omega^2 y(\xi)\,d\xi - M_0\omega^2 y_0 - c\omega^2 y'(x),$$

und eine zweite Differentiation liefert die Differentialgleichung des Problems

$$(2{\cdot}22)\qquad (\alpha y'')'' = \omega^2(\varrho F y + (c y')').$$

An der Einspannstelle $x = l$ hat man wie in 2·3 die Randbedingungen: $y(l) = y'(l) = 0$; die Randbedingungen für $x = 0$ erhält man, indem man in (2·20) und (2·21) $x = 0$ setzt.

$$(2{\cdot}23)\qquad \begin{aligned} \alpha y''(0) &= C\omega^2 y'(0), \\ (\alpha y'')'_0 &= M_0\omega^2 y(0) + c\omega^2 y'(0). \end{aligned}$$

Auch bei diesem Problem tritt der Eigenwert ω^2 in den Randbedingungen auf.

2·7. Torsionsschwingungen von Scheiben [1]). Eine auf einer Welle sitzende rotierende Scheibe mit der vom Abstand r von der Drehachse abhängigen Dicke $y(r)$ kann unter dem Einfluß von Drehzahlschwankungen in ihrer Ebene Torsions- und Dehnungsschwingungen ausführen, die miteinander gekoppelt sind. Die Kopplungskräfte sind jedoch zahlenmäßig klein gegenüber den für die Schwingung maßgeblichen Trägheitskräften, und man darf [2])

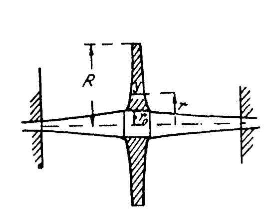


Abb. 2·11. Zur Torsionsschwingung einer Scheibe, Gesamtanordnung.

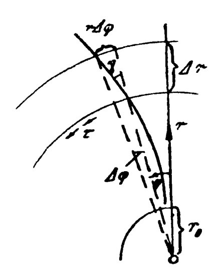


Abb. 2·12. Formänderung der Scheibe bei Torsionsschwingungen.

bei der Berechnung der Eigenfrequenzen sowohl von der Kopplung absehen als auch die Berechnung an der nichtrotierenden Scheibe vornehmen. Im folgenden werden daher radiale Dehnungen außer acht gelassen; die Welle wird als an den Enden eingespannt angesehen, Abb. 2·11. Bei einer Torsionsschwingung verschieben sich konzentrische Scheibenkreise gegenein-

---

[1]) R. GRAMMEL, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) 193—200. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 652ff.

[2]) BIEZENO und GRAMMEL, a. a. O., S. 655.

ander, und eine ursprünglich auf der Scheibe markierte Gerade wird in eine durch den Verdrehungswinkel $\varphi = \varphi(r)$ gekennzeichnete Kurve, Abb. 2·12, übergehen. Damit sind Gleitungen γ (Änderungen des ursprünglich rechten Winkels) und Schubspannungen τ verbunden. Abb. 2·12 ergibt unmittelbar

$$\gamma = r \frac{\Delta \varphi}{\Delta r}$$

oder als Grenzwert, wenn Striche Ableitungen nach r bedeuten,

$$\text{Gleitung } \gamma = r\varphi' \text{ und}$$

(2·24) $$\text{Schubspannung } \tau = G\gamma = Gr\varphi'.$$

G ist dabei die Schubzahl.

Nun greifen wir aus der Scheibe einen von r bis $r + \Delta r$ reichenden Ring heraus. Die sämtlichen Schubspannungen ergeben zusammen ein Moment bezüglich der Wellenachse (innen und außen verschieden, innen $= M$, außen $= M + \Delta M$); die Differenz ΔM dient zur Drehbeschleunigung des Ringes. Die Schubspannungen wirken auf einer Fläche der Größe $2\pi r y$, sie ergeben also das Moment

$$M = 2\pi r \cdot \tau \cdot y \cdot r \text{ innen,}$$

$$M + \frac{dM}{dr} \cdot \Delta r \text{ außen.}$$

Der herausgegriffene Ring hat das Massenträgheitsmoment (mit ϱ als Dichte)

$$\varrho\, 2\pi r \Delta r y \cdot r^2,$$

also lautet für ihn die Bewegungsgleichung

$$\Delta M \approx \frac{dM}{dr} \Delta r = \varrho\, 2\pi r \Delta r y r^2 \ddot{\varphi}$$

oder

$$(r^2 \tau y)' = \varrho r^3 y \ddot{\varphi},$$

und wenn man für τ seinen Wert nach (2·24) einsetzt,

(2·25) $$G \cdot (r^3 y \varphi')' = \varrho r^3 y \ddot{\varphi}.$$

Mit $\varphi(r, t) = \Phi(r) \cdot \cos \omega t$ lautet die Differentialgleichung

(2·26) $$\frac{G}{\varrho} \cdot (r^3 y \varphi')' = -\omega^2 r^3 y \varphi.$$

Am Innenrande $r = r_0$ hat man die Randbedingung

$$\varphi'(r_0) = c \cdot \varphi(r_0),$$

die Schubspannung ist proportional zum Drehwinkel, die Konstante c berechnet sich aus der Anordnung und wäre z. B. eine andere, wenn die Welle einseitig eingespannt wäre.

Am freien Außenrande $r = R$ ist die Schubspannung $\tau = 0$ und daher

$$\varphi'(R) = 0 .$$

Trägt dagegen der Rand noch eine träge Masse, etwa eine Beschaufelung, so müssen die Schubspannungen am Rande ein Moment aufbringen, welches zur Winkelbeschleunigung der Schaufelmassen dient. Es ist dann $-\tau(R) = \ddot{\varphi}(R) \cdot \text{const.}$ und man hat die Randbedingung $\varphi'(R) = C_1 \omega^2 \varphi(R)$. Dabei ist C_1 eine positive Konstante und ω^2 der Eigenwert.

§ 3. Ergänzungen.

3·1. Eigenwertprobleme und Verzweigungsprobleme. Viele der hier besprochenen Aufgaben sind „Verzweigungsprobleme". Wir erläutern dies an dem in 1·1 behandelten Ausknicken des eingespannt-freien Stabes. Die seitliche Verschiebung des Kraftangriffspunktes ist durch die Größe B der Integrationskonstanten gegeben, und es war das paradoxe Ergebnis herausgekommen, daß für alle von den Knicklasten verschiedenen Werte der Belastung P die Größe $B = 0$ sein muß und daß für die Knicklasten selbst B beliebig sein kann. Das Ergebnis widerspricht der Wirklichkeit, denn bei einer die Knicklast etwas überschreitenden Last würde nach dieser Theorie wieder nur die geradlinige Gleichgewichtslage möglich sein. Der Widerspruch entfällt, wenn man an Stelle der Differentialgleichung (1·1) die Gleichung für *endliche* Ausbiegungen $y(x)$

$$M = -\frac{\alpha}{\varrho} \quad \text{mit} \quad \varrho = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}$$

benutzt (ϱ = Krümmungshalbmesser der elastischen Linie). An Stelle von (1·2) tritt dann

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3} = -\frac{P}{\alpha(x)}\, y . \tag{3·1}$$

Diese Differentialgleichung ist dann nicht mehr linear, ihre Integration ist bei konstantem $\alpha(x)$ mit Hilfe von elliptischen Funktionen möglich[1]). Die Gleichung (3·1) besitzt bei den Randbedingungen $y(0) = y'(l) = 0$ wieder für beliebiges P die triviale Lösung $y = 0$, aber außerdem zweigen von dieser Lösung an den Stellen

$$P = \alpha \left[\frac{(2m - 1)\pi}{2l} \right]^2$$

nichttriviale Lösungen $y(x)$ ab; die zugehörige Seitenverschiebung des Kraftangriffspunktes ist in Abb. 3·1 gestrichelt eingezeichnet. Die ge-

[1]) H. HEINZERLING, Mathematische Behandlung einiger grundlegender Fragen des Knickproblems des geraden Stabes, Diss., Karlsruhe 1938, S. 39.

strichelten Kurven haben an den „Verzweigungspunkten" senkrechte Tangenten, so daß also für genügend kleine Ausbiegungen die gestrichelten und ausgezogenen Linien übereinstimmen. Die Eigenwertdifferentialgleichung (1·2) entsteht aus der genaueren (3·1) durch „Linearisierung", d. h. durch

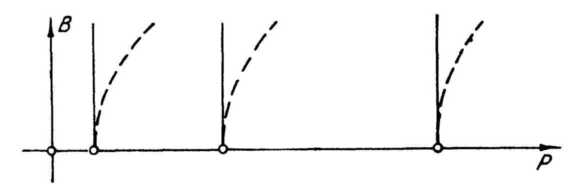


Abb. 3·1. Seitliche Verschiebung des Kraftangriffspunktes bei der Ausknickung nach der Theorie der kleinen Auslenkungen (——) und nach der genaueren Theorie (– – –) (nicht maßstäblich).

Entwicklung nach y und seinen Ableitungen und Streichen aller nichtlinearen Glieder. Die Verzweigungsstellen werden dabei exakt erfaßt. Die Eigenwertrechnung liefert also die Verzweigungsstellen des exakt angefaßten, endliche Formänderungen berücksichtigenden Problems.

3·2. Systeme von Differentialgleichungen. Bei der Aufstellung technischer Eigenwertprobleme wird man häufig (vgl. die Beispiele in 1·7, 1·8, 2·1) auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für mehrere Unbekannte geführt, aus dem man durch Elimination von Unbekannten eine einzelne Differentialgleichung höherer Ordnung aufstellen kann. Wir nennen hier als weiteres Beispiel das Problem, bei einem Holm-Rippenrost[1]) (Abb. 3·2) die Kippgrenze bei einer Belastung durch Biegemomente M_1, M_2 zu bestimmen.

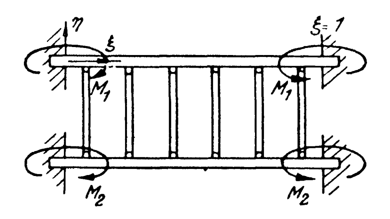


Abb. 3·2. Kippen eines Holm-Rippenrostes infolge von Biegemomenten.

Für die seitliche Auslenkung η und die beiden Kippwinkel β_1 und β_2 ergeben sich bei Einführung dimensionsloser Größen die Differentialgleichungen

$$(3{\cdot}2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\mu_1\beta_1'' + \mu_2\beta_2'') + c_1\eta^{\mathrm{IV}} = 0,\\ &c_1\mu_1\eta'' - \beta_1'' + c_2(2\beta_1 + \beta_2) = 0,\\ &c_1\mu_2\eta'' - \beta_2'' + c_2(\beta_1 + 2\beta_2) = 0 \end{aligned}\right.$$

mit $M_1 = \mu_1 c_3$, $M_2 = \mu_2 c_3$. Dabei sind c_1, c_2, c_3 von den geometrischen Abmessungen und Steifigkeiten der beiden Holme und der Rippen abhängende, gegebene

[1]) J. Weinhold, Über Kipplasten eines Holm-Rippenrostes, Ing.-Arch. 9 (1938) 411—419.

Konstanten. Als unabhängige Veränderliche hat man eine Koordinate ξ in Längsrichtung eines Holmes, Striche bedeuten Ableitungen nach ξ. Nimmt man die Holmenden auf beiden Seiten als fest eingespannt an, so hat man die Randbedingungen

$$\left\{\begin{array}{l}\beta_1(0) = \beta_1(1) = \beta_2(0) = \beta_2(1) = 0, \\ \eta(0) = \eta(1) \;\;= \eta'(0) = \eta'(1) = 0.\end{array}\right. \tag{3·3}$$

Bei Einführung von $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$, $\beta_1 - \beta_2 = \delta$ kann man die Differentialgleichungen auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}(\mu_1 + \mu_2)\,\gamma'' + (\mu_1 - \mu_2)\,\delta'' + 4\,c_1\eta^{\mathrm{IV}} &= 0, \\ c_1(\mu_1 + \mu_2)\,\eta'' - \gamma'' + 3\,c_2\gamma &= 0, \\ c_1(\mu_1 - \mu_2)\,\eta'' - \delta'' + c_2\delta &= 0.\end{aligned}$$

Jetzt lassen sich γ und δ leicht eliminieren, und für η ergibt sich die Gleichung achter Ordnung

$$\eta^{\mathrm{VIII}} + \eta^{\mathrm{VI}}\left(-4c_2 + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2}\right) + c_2\eta^{\mathrm{IV}}(3c_2 - \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 - \mu_2^2) = 0. \tag{3·4}$$

An den Randstellen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ verschwinden die Ausdrücke

$$\eta,\ \eta',\ 2\eta^{\mathrm{IV}} + (\mu_1^2 + \mu_2^2)\,\eta'',\ 2\eta^{\mathrm{VI}} + (\mu_1^2 + \mu_2^2)\,\eta^{\mathrm{IV}} + 2c_2(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\,\eta''. \tag{3·5}$$

Setzt man $\mu_2 = \mathrm{const}\cdot\mu_1$, so erscheint μ_1^2 als Eigenwert λ.

Während beim System (3·2) der Eigenwert λ nicht in den Randbedingungen (3·3) auftritt, kommt der Eigenwert in den Randbedingungen (3·5) für die Differentialgleichung achter Ordnung vor.

In den beiden Fällen $\mu_1 = \mu_2$ und $\mu_1 = -\mu_2$ reduziert sich die Aufgabe auf ein Problem sechster Ordnung. Für $\mu_1 = \mu_2 = \sqrt{\lambda}$ erhält man die Gleichung

$$-\eta^{\mathrm{VI}} + 3c_2\eta^{\mathrm{IV}} = \lambda\eta^{\mathrm{IV}} \tag{3·6}$$

und für $\mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{\lambda}$ folgt

$$-\eta^{\mathrm{VI}} + c_2\eta^{\mathrm{IV}} = \lambda\eta^{\mathrm{IV}}. \tag{3·7}$$

In beiden Fällen hat man dieselben sechs Randbedingungen

$$\eta(0) = \eta'(0) = \eta(1) = \eta'(1) = \eta^{\mathrm{IV}}(0) + \lambda\eta''(0) = \eta^{\mathrm{IV}}(1) + \lambda\eta''(1) = 0.$$

3·3. Andere Randbedingungen, Beziehungen zwischen den Werten an beiden Randstellen. Man kann noch mannigfache andere Randbedingungen als in § 1 und § 2 erhalten, z. B. solche, die die beiden Randstellen in Verbindung bringen. Erzwingt man z. B. bei den Biegeschwingungen eines Stabes (Abb. 3·3, links) gleiche Ausschläge durch ein Seil, in dem die Seilkraft S herrsche, so hat man die Randbedingungen

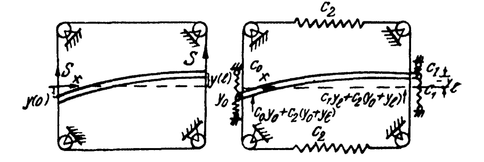


Abb. 3·3. Andersartige Randbedingungen.

$$\begin{aligned}y(0) &= -y(l), \qquad y''(0) = y''(l) = 0, \\ (\alpha y'')'_{x=0} &= -(\alpha y'')'_{x=l} = S.\end{aligned}$$

Schaltet man in das Seil noch eine Feder ein und lagert die Enden elastisch (Abb. 3·3, rechts), so lauten die Randbedingungen

$$y''(0) = y''(l) = 0,$$
$$(\alpha y'')'_{x=0} = (C_0 + C_2)\,y(0) + C_2\,y(l); \quad -(\alpha y'')'_{x=l} = (C_1 + C_2)\,y(l) + C_2\,y(0).$$

3·4. Vermischte Übungsaufgaben. 1. Man formuliere das Eigenwertproblem, insbesondere die Randbedingungen, für einen am einen Ende eingespannten, am anderen Ende ($x = 0$) elastisch gestützten Druckstab[1]) (Abb. 3·4). Es sei c die Federkonstante der elastischen Stützung, $\alpha(x)$ die Biegesteifigkeit des Stabes, P die gesuchte Knicklast. Das Eigengewicht werde vernachlässigt.

Lösung: Zu der Differentialgleichung (1·3) treten die Randbedingungen

$$y(l) = y'(l) = y''(0) = 0; \qquad P\,y'(0) + c\,y(0) + (\alpha y'')'_{x=0} = 0.$$

Der Eigenwert $\lambda = P$ tritt in der letzten Randbedingung auf.

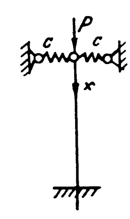


Abb. 3·4. Einseitig eingespannter, am anderen Ende elastisch gestützter Druckstab.

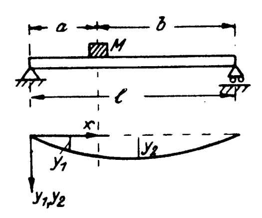


Abb. 3·5. Biegeschwingungen eines Trägers mit Einzellast.

2. Ein an den Enden gestützter Stab der Länge l mit konstanter Biegesteifigkeit α und konstanter Masse μ pro Längeneinheit trage im Abstand a von einem Auflager eine Masse M (Abb. 3·5) (Motor auf einem Träger). Man stelle die transzendente Gleichung für die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen auf (wie in 2·3 unter Vernachlässigung der Nebeneinflüsse durch Rotationsträgheit, Längsschwingungen usw.).

Lösung[2]): Bezeichnet man die Durchbiegungen im linken Felde mit $y_1(x)$, im rechten mit $y_2(x)$, so erfüllen mit $\lambda = \frac{\mu\,\omega^2}{\alpha} = k^4$ die Funktionen

$$y_1 = A_1 \sin kx + B_1 \operatorname{Sin} kx,$$
$$y_2 = A_2 \sin k(l - x) + B_2 \operatorname{Sin} k(l - x)$$

die Differentialgleichung und die Randbedingungen. Die Konstanten A_1, B_1, A_2, B_2 sind aus den Übergangsbedingungen

$$y_1(a) = y_2(a); \qquad y_1(a) = y_2(a);$$
$$y_1''(a) = y_2''(a); \qquad y_1'''(a) = y\ '(a) - \frac{M\,\omega^2}{\alpha}\,y_1(a)$$

---

[1]) A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II, 2. Aufl. München und Berlin (1928), S. 311 (dort allerdings anders behandelt).

[2]) Die gleiche Aufgabe ist bei K. Hohenemser und W. Prager, Dynamik der Stabwerke, Berlin 1933, S. 139/40, in Angriff genommen, aber nicht bis zur Gleichung (3·8) durchgeführt.

zu eliminieren. Mit der Abkürzung $b = l - a$ erhält man für k die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\sin ka \sin kb}{\sin kl} - \frac{\mathfrak{Sin}\, ka\, \mathfrak{Sin}\, kb}{\mathfrak{Sin}\, kl} = \frac{2\mu}{Mk}. \tag{3·8}$$

3. Ein prismatischer Stab der Länge l, der nach Art der Abb. 3·6 an den Enden gelagert ist, trägt in seiner Mitte und am rechten Ende je eine axial wirkende Kraft Q. Man berechne den kritischen Wert von Q, d. h. den Wert, bei dessen Überschreitung Ausknicken eintritt.

Lösung: Da der Stab konstante Biegesteifigkeit α hat, kann man die Differentialgleichung der elastischen Linie in jedem der beiden Felder links und rechts von der Mittellast Q in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen integrieren; die Elimination der Integrationskonstanten aus den Rand- und Übergangsbedingungen liefert für die Größe $\sigma = \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}\frac{l}{2}$ die transzendente Gleichung

$$6\sigma \operatorname{ctg} \sigma + 3\sqrt{2}\,\sigma \operatorname{ctg}\left(\sqrt{2}\,\sigma\right) = 1.$$

Abb. 3·6 Knickproblem für einen Stab mit zwei Druckkräften Q.

Die ersten beiden zu den Wurzeln σ_1, σ_2 gehörenden Eigenwerte sind bei C. B. Biezeno, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 512–516, auf einem anderen Wege als hier näherungsweise berechnet zu

$$\frac{Q_1 l^2}{\alpha} = (2\sigma_1)^2 = 6{,}506; \qquad \frac{Q_2 l^2}{\alpha} = (2\sigma_2)^2 = 25{,}2.$$

4. Bei der Aufgabe 3 sei die Mittellast P statt Q, also die linke Auflagerkraft $P + Q$ statt $2Q$. Man stelle die zwischen P und Q bestehende Bedingung für Beginn des Ausknickens auf. Lösungsgang wie bei 3. Mit den Abkürzungen

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}\,\frac{l}{2}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\frac{P+Q}{\alpha}}\,\frac{l}{2}$$

erhält man

$$Q(2P + Q)\sigma_2 \operatorname{ctg}\sigma_2 + (P+Q)(P+2Q)\sigma_1 \operatorname{ctg}\sigma_1 = P^2.$$

5. Man stelle die transzendente Gleichung für die Eigenkreisfrequenzen ω bei den Biegeschwingungen eines Trägers auf drei Stützen mit den Feldlängen l_1, l_2 (Abb. 3·7) auf. Biegesteifigkeit α und Masse μ pro Längeneinheit seien feldweise konstant, Nebeneinflüsse wie in Aufgabe 2 vernachlässigt.

Abb. 3·7. Biegeschwingungen eines Trägers auf drei Stützen.

Ergebnis: Mit

$$l_1 \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{\alpha_1}} = k_1; \qquad l_2 \sqrt[4]{\frac{\mu_2 \omega^2}{\alpha_2}} = k_2$$

läßt sich die gesuchte Gleichung in der Gestalt schreiben:

$$\frac{S(k_1)}{\mathfrak{B}(k_1)} + \sqrt[4]{\frac{\alpha_1 \mu_2}{\alpha_2 \mu_1}}\,\frac{S(k_2)}{\mathfrak{B}(k_2)} = 0. \tag{3·9}$$

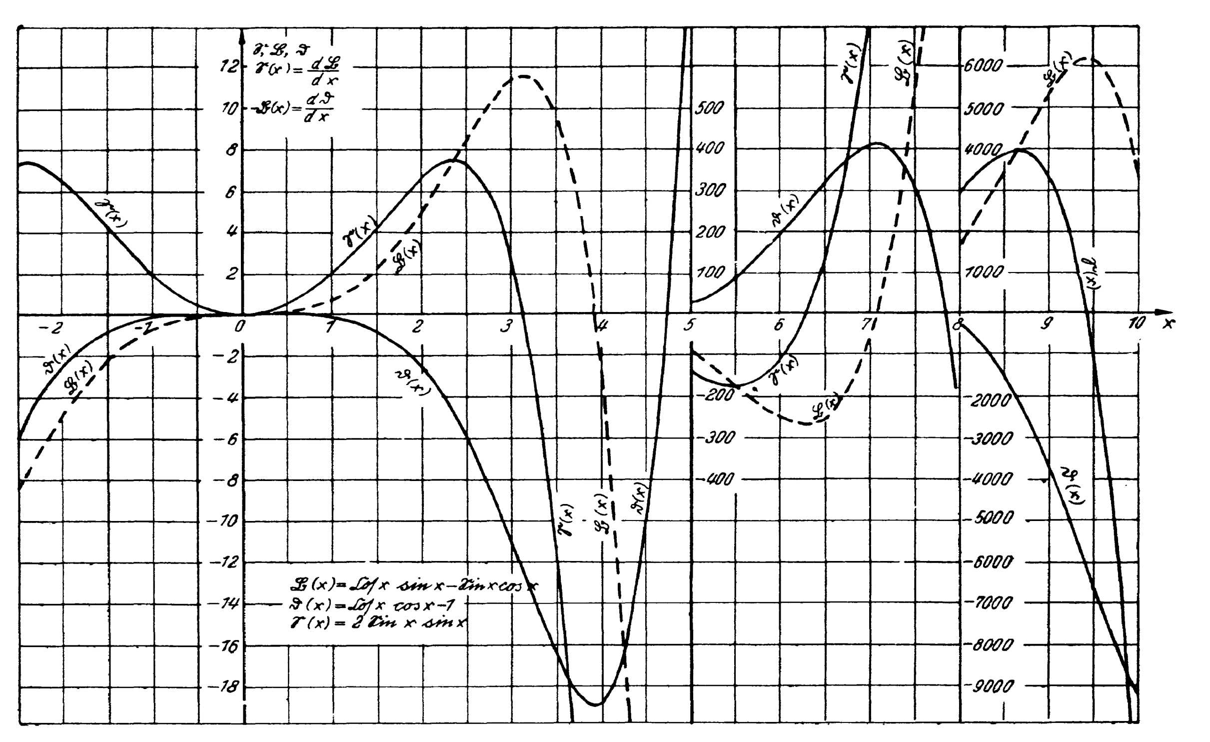


Abb. 3·9. Graphische Darstellung der Frequenzfunktionen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ von Hohenemser und Prager.

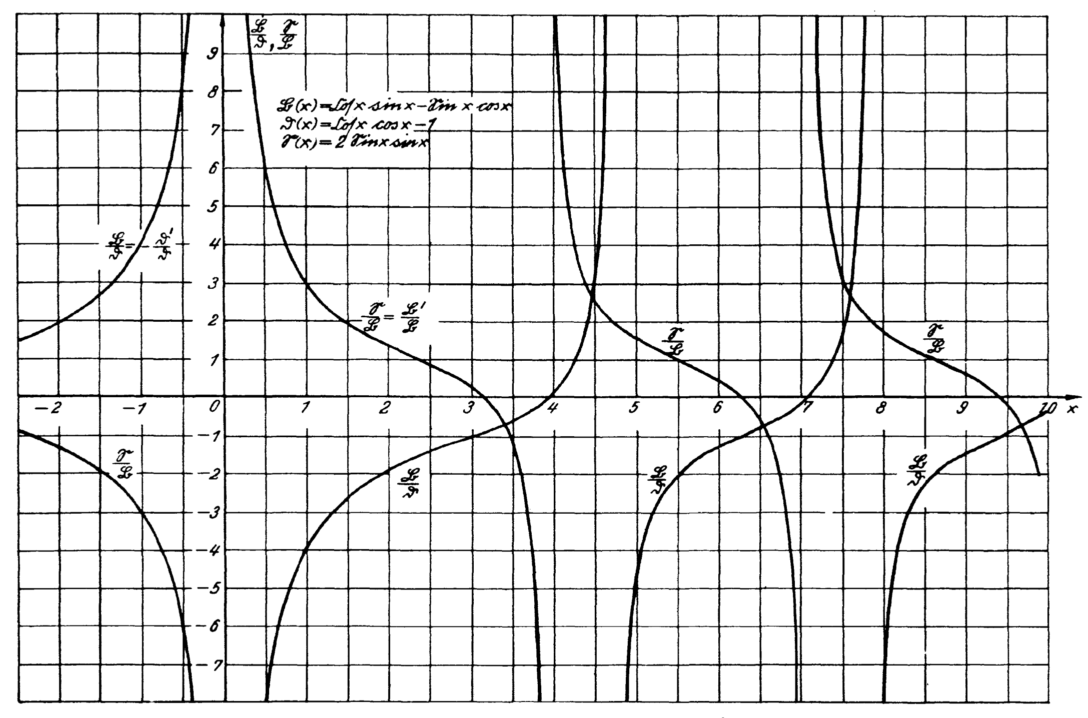


Abb. 3·10. Graphische Darstellung der Funktionen $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$ und $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}}$.

Dabei sind die von HOHENEMSER-PRAGER[1]) eingeführten und tabulierten Hilfsfunktionen benutzt, die sich bei vielen Schwingungsproblemen von einzelnen Trägern und ganzen Stabwerken bewährt haben:

$$(3\cdot 10)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}(x) &= \mathfrak{Cof}\,x \sin x + \mathfrak{Sin}\,x \cos x,\\ \mathfrak{B}(x) &= \mathfrak{Cof}\,x \sin x - \mathfrak{Sin}\,x \cos x,\\ \mathfrak{C}(x) &= 2\,\mathfrak{Cof}\,x \cos x,\\ \mathfrak{S}(x) &= 2\,\mathfrak{Sin}\,x \sin x,\\ \mathfrak{D}(x) &= \mathfrak{Cof}\,x \cos x - 1,\\ \mathfrak{E}(x) &= \mathfrak{Cof}\,x \cos x + 1.\end{aligned}\right.$$

In Abb. 3·9 und 3·10 sind die Funktionen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ und die oft vorkommenden Quotienten $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$ und $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}}$ graphisch dargestellt.

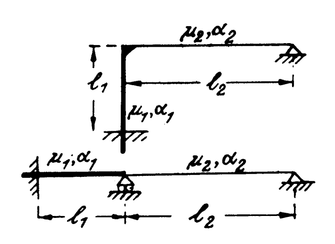


Abb. 3·8. Biegeschwingungen eines Rahmens.

6. Abb. 3·8 zeigt einen einfachen eckensteifen Rahmen mit der Höhe des Pfostens l_1 und der Riegellänge l_2. Er sei am einen Ende eingespannt, am anderen gelenkig gelagert. Die angegebenen Biegesteifigkeiten α_1, α_2 und die Massen μ_1, μ_2 pro Längeneinheit seien konstant. Man bestimme zunächst allgemein und dann für den Spezialfall $\frac{\mu_1}{\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\alpha_2}$, $l_2 = 2l_1$ die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen, wieder wie in Aufgabe 2 unter Vernachlässigung von Nebeneinflüssen.

Ergebnis: Die Eigenfrequenzen sind dieselben wie bei einem Träger mit einer Einspannung und zwei Stützen nach Art der Abb. 3·8. Die Frequenzgleichung lautet mit den in Aufgabe 5 eingeführten HOHENEMSER-PRAGERschen Frequenzfunktionen und den Abkürzungen k_1, k_2 von Aufgabe 5:

$$\frac{\mathfrak{B}(k_1)}{\mathfrak{D}(k_1)} = \sqrt[4]{\frac{\alpha_1\mu_2}{\alpha_2\mu_1}}\,\frac{\mathfrak{S}(k_2)}{\mathfrak{B}(k_2)}.$$

Im Spezialfall $\frac{\mu_1}{\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\alpha_2}$; $l_2 = 2l_1$ erhält man

$$\frac{\mathfrak{B}(k_1)}{\mathfrak{D}(k_1)} = \frac{\mathfrak{S}(2k_1)}{\mathfrak{B}(2k_1)}.$$

Aus Abb. 3·10 kann man Näherungswerte für k_1 ablesen und diese mit Hilfe der Tabellen bei HOHENEMSER-PRAGER verbessern. Für die Grundschwingung und die erste Oberschwingung erhält man die Werte

$$k_1 = 1{,}809 \text{ bzw. } 3{,}2804,$$

aus denen sich die Frequenzen ω nach $\omega = \frac{k_1^2}{l_1^2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\mu_1}}$ berechnen.

[1]) K. HOHENEMSER und W. PRAGER, Dynamik der Stabwerke, Berlin 1933, S. 127ff. Dort findet man auch zahlreiche andere Beispiele von Trägern und Stabwerken durchgerechnet.

7. Torsionsschwingungen einer Welle mit Einzeldrehmassen. Auf einer homogenen, beiderseits eingespannten Welle (Abb. 3·11) sind zwei Einzeldrehmassen mit den Massenträgheitsmomenten Θ_1, Θ_2 bezüglich der Wellenachse aufgesetzt. Es sollen die Eigenfrequenzen ω der Torsionsschwingungen berechnet werden. Es sei C die Verdrehungssteifigkeit und Θ das Massenträgheitsmoment pro Längeneinheit der Welle, C und Θ konstant.

Ergebnis: Mit den Abkürzungen

$$\frac{\omega^2 \Theta l_1^2}{C} = \lambda = k^2, \quad D_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta l_1}, \quad D_2 = \frac{\Theta_2}{\Theta l_1}$$

erhält man für k die transzendente Gleichung

Abb. 3·11. Torsionsschwingung einer Welle mit zwei aufgesetzten Einzeldrehmassen.

$$3 - 4 \sin^2 k - (D_1 + D_2)\, k \sin 2k + D_1 D_2 k^2 \sin^2 k = 0 .$$

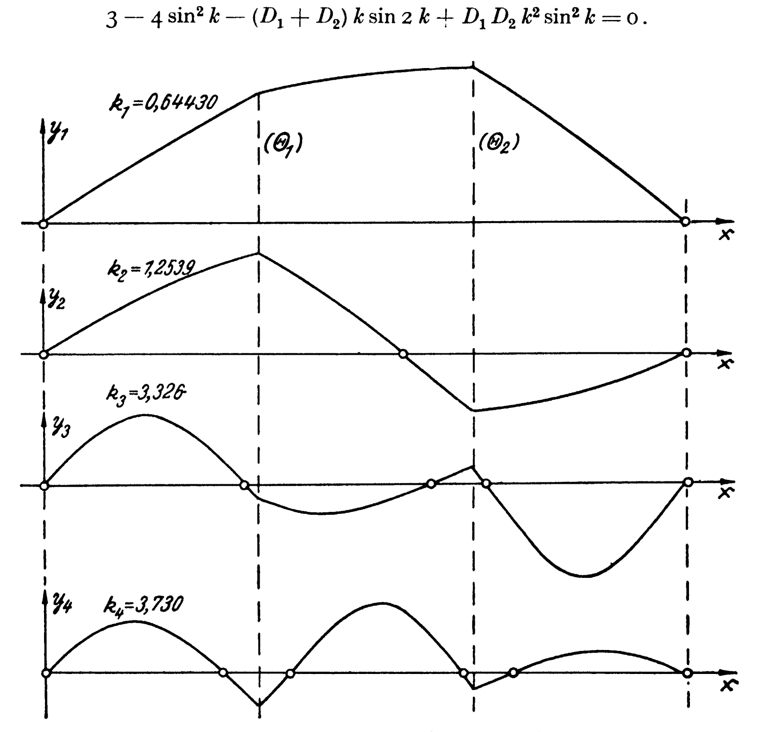


Abb. 3·12. Die ersten vier Eigenschwingungsformen des Systems von Abb. 3·11.

Zahlenbeispiel: $D_1 = 1$, $D_2 = 2$. Die ersten vier Wurzeln der transzendenten Gleichung sind dann

$$k_1 = 0{,}64430, \quad k_2 = 1{,}2539, \quad k_3 = 3{,}326, \quad k_4 = 3{,}730$$

und

$$\lambda_1 = 0{,}41512, \quad \lambda_2 = 1{,}5721, \quad \lambda_3 = 11{,}06, \quad \lambda_4 = 13{,}91.$$

Abb. 3·12 zeigt die zugehörigen ersten vier Eigenschwingungsformen, also hier den Winkel $y(x)$, um den der Querschnitt der Welle an der Stelle x aus der Ruhelage herausgedreht wird. Die $y(x)$-Kurve weist an den Stellen der Einzeldrehmassen Knicke auf. An den Enden ist $y = 0$. Bei der Grundschwingung ist y sonst von Null verschieden, die erste Oberschwingung weist einen, die zweite Oberschwingung aber gleich drei Knoten auf; es ist bemerkenswert, daß bei diesem Beispiel eine Eigenschwingungsform mit zwei Knoten im Innern nicht vorhanden ist.

3·5. Zusammenstellung von Eigenwertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. In der Tafel I sind einige einfache Beispiele von Eigenwertproblemen aus der Mechanik zusammengestellt, und zwar geordnet nach der Art der Differentialgleichung, die jeweils die Aufgabe beherrscht. Bei den beiden ersten Gruppen ist der Eigenwert λ in der Differentialgleichung mit der Eigenfunktion, aber nicht mit Ableitungen der Eigenfunktion multipliziert, in der dritten und vierten Gruppe ist λ auch mit Ableitungen multipliziert (der Begriff „Eingliedklasse" wird in 4·4 näher erläutert), die weiteren Gruppen enthalten Besonderheiten.

Eine derartige Aufzählung kann natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Bei den einfachsten Fällen, z. B. Saiten- und Stabschwingungen, Stabknickung, wurden mehrere Arten von Randbedingungen aufgeführt; in ähnlicher Weise kann man bei vielen der genannten Probleme durch andere Lagerungsarten und damit andere Randbedingungen die Zahl der Beispiele vermehren. Durch Betrachtung komplizierterer (z. B. aus mehreren Teilen zusammengesetzter) Systeme kann man beliebig viele weitere Beispiele von Eigenwertproblemen aufstellen. Ferner erhält man zahlreiche Beispiele von Eigenwertproblemen aus den verschiedenen anderen Zweigen der Physik, auf die hier nicht eingegangen wurde.

In der Tafel I wurden feststehend folgende Bezeichnungen verwendet:

c Federkonstante
c Differenz von Trägheitsmomenten
C Torsionssteifigkeit
c_1, c_2 ... Konstanten
D Flanschenkonstante
E Elastizitätszahl
F Querschnittsfläche
G Gewicht, Gewichtsfunktion
g Fallbeschleunigung
l Länge des Stabes, der Saite usw
m.B.v. mit Berücksichtigung von
M Drehmoment

P Druckkraft
S Seilkraft, Saitenkraft
x unabhängige Veränderliche
y Eigenfunktion
α Biegesteifigkeit
$\varkappa$ Bettungsziffer
λ Eigenwert
ϱ Dichte
ω Kreisfrequenz

Ferner wurden bei den Schrifttumsangaben der Tafel I, die im Verhältnis zu dem sehr umfangreichen Schrifttum nur sehr spärlich sein konnten und oft nur angeben, wo weitere Literatur zitiert wird, folgende Werke aus Platzgründen abgekürzt angeführt:

AUERBACH und HORT, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. III (1927), Bd. IV, Teilbd. 1 (1931).

C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, Technische Dynamik, Berlin 1939.

R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1931.

Handbuch der Physik, Bd. VI, Berlin (1928), Artikel von F. PFEIFFER über Elastokinetik, S. 309—403.

J. RATZERSDORFER, Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien 1936.

S. TIMOSHENKO, Schwingungsprobleme der Technik, Berlin 1932.

ZaMM = Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.

Literatur zu Tafel I (Fortsetzung S. 48 und 49).

1) Handbuch d. Physik, VI, 353, 355; COURANT-HILBERT I, 250.
2) M. BIOT, ZaMM 14 (1934) 216.
3) K. KLOTTER, Ing.-Archiv 3 (1932) 156.
4) Handbuch d. Physik VI, 357.
5) Handbuch d. Physik VI, 358.
6) J. RATZERSDORFER (1936) 22; BIEZENO-GRAMMEL, 502, 506.
7) L. PRANDTL, Dissert. München 1899; J. WEINHOLD, ZaMM 14 (1934) 380.
8) BIEZENO-GRAMMEL, 653, 657, 663.
9) Ing.-Archiv I (1930) 301; TH. PÖSCHL, Techn. Mech. II (1936) 185.
10) KLOTTER-KOTOWSKI, ZaMM 19 (1939) 289.
11) Handbuch d. Physik VI, 379.
12) Handbuch d. Physik VI, 367.
13) E. SCHWERIN, ZaMM 2 (1922) 84.
14) Handbuch d. Physik VI, 360, 368; S. TIMOSHENKO (1932) 245, 293; N. MONONOBE, ZaMM 1 (1921) 444; CL. SCHAEFER, Theor. Physik, Bd. 1 (1937) 682.
15) HOHENEMSER-PRAGER, Dynamik der Stabwerke (1933), 77.
16) Handbuch d. Physik VI, 365.
17) PUWEIN, Beton u. Eisen 39 (1940) 162.
18) FÖPPL, Drang u. Zwang II (1920) 355.
19) FÖPPL, Drang u. Zwang II (1920) 359.
20) W. MEYER ZUR CAPELLEN, ZaMM 15 (1935) 243.
21) K. KLOTTER, Ing.-Archiv 3 (1932) 156.
22) BIEZENO-GRAMMEL 521; J. RATZERSDORFER (1936) 142.

Tafel I. Einfache Beispiele technischer Eigenwert-

Die mit * versehenen Abb. sind senkrecht stehend zu denken $x = 0 \quad x \quad x = l$ $\circ \quad \rightarrow \quad \circ$	Benennung m.B.v. = mit Berücksichtigung von o.B.v. = ohne ,, ,,	Literatur (Fußnoten auf S. 39, 48, 49)	λ
	1. Spezielle Eigenwertprobleme $M[y] = \lambda p(x) y$. Differentialgleichungen 2. Ordnung.		
	Querschwingungen einer Saite, Enden fest	1) S. 39	ω^2
	,, ,, ,, ein Ende frei		,,
	,, ,, ,, Enden elastisch befestigt	2) S. 39	,,
	Querschwingungen einer elastisch gebetteten Saite	3) S. 39	,,
	Längsschwingung eines Stabes, Enden fest	4) S. 39	,,
	,, ,, ,, ein Ende frei		,,
	Torsionsschwingung eines Stabes,	5) S. 39	,,
	,, ,, ,, Enden drehbar gelagert		,,
	Stabknickung, Enden gelenkig	6) S. 39	P
	,, Enden eingespannt, frei		,,
	Kippen eines Trägers	7) S. 39	P^2
	Dampfturbinenscheiben { Torsionsschwingung	8) S. 39	$c_1 \omega^2$
	Dampfturbinenscheiben { Dehnungsschwingung		$c_1 \omega^2$
	Knicken eines Kreisringes bei konstantem Außendruck p	9) S. 39	p
	Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt	10) S. 39	ω^2
	Querschwingungen einer Kreisringmembran (Innenradius R_i, Außenradius R_a)	11) S. 39	,,
	Biegeschwingung eines Stabes, der um eine zu ihm senkrechte Achse rotiert, (o.B.v. Biegungskräften, nur Zentrifugalkräfte)	12) S. 39	,,
	Stabilität dünnwandiger Hohlkugeln unter gleichmäßigem Außendruck	13) S. 39	

Literatur zu Tafel I

probleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Differentialgleichung	Wesentliche Randbedingungen	Restliche Randbedingungen
	Abkürzungen: $y_0 = y(0)$, $y_l'' = y''(l)$ usw.	
$-y'' = \lambda \frac{\varrho F}{S} y$	$y_0 = y_l = 0$	
,,	$y_0 = 0$	$y_l' = 0$
,,		$c_1 y_0 = y_0'$; $-c_2 y_l = y_l'$
$-y'' + c_1 y = \lambda c_2 y$	$y_0 = y_l = 0$	
$-E(Fy')' = \lambda \varrho F y$	$y_0 = y_l = 0$	
,,	$y_0 = 0$	$y_l' = 0$
$-(Cy')' = \lambda \varrho J_p y$	$y_l = 0$	$y_0' = 0$
,,		$y_0' = y_l' = 0$
$-y'' = \lambda \frac{1}{\alpha} y$	$y_0 = y_l = 0$	
,,	$y_0 = 0$	$y_l' = 0$
$-(Cy')' = \lambda \frac{x^2}{\alpha} y$	$y_l = 0$	$y_0' = 0$
$-(x^3 h y')' = \lambda x^3 h y$	$y_l = 0$	$c_3 y_0 = y_0'$ (für beide Zeilen)
$-y'' - y'\left(\frac{h'}{h} + \frac{1}{x}\right) - y\left(\frac{\nu}{x}\frac{h'}{h} - \frac{1}{x^2}\right) = \lambda y$		$c_2 y_l = y_l'$; $c_3 y_0 = y_0'$
$-y'' + y = \lambda c_1 y$	Periodizität	
$-y'' + g(x) \cdot y = \lambda c_1 y;\quad g(x) = g(x + 2\pi)$	Periodizität	
$-(xy')' + \frac{n^2}{x} y = \lambda c_1 x y$	$y(R_i) = y(R_a) = 0$	
$-[(c_1^2 - x^2)y']' = \frac{2}{w_l^2} \lambda y$		
$-y'' - y' \operatorname{ctg} x + y \operatorname{ctg}^2 x = \lambda y$		

siehe S. 39, 48 und 49.

Differentialgleichungen 4. Ordnung. **Tafel I**

Biegeschwingungen eines Stabes, Enden gelenkig	14) S. 39	ω^2
„ „ „ ein Ende frei		„
„ „ „ Enden eingesp.		„
„ „ „ elastische Stützen		„
Biegeschwingungen, Verbindung von elastischer Auflagerung und elastischer Einspannung	15) S. 39	„
Biegeschwingungen eines gedrückten Stabes	16) S. 39	„
„ m.B.v. Eigengewicht (Schornstein)	17) S. 39	„
Torsionsschwing. von I-Profilen m.B.v. Flanschbieg.	18) S. 39	„
„ „ „ Enden gelagert		„
Kippen von I-Trägern m.B.v. Flanschbiegung	19) S. 39	$c_1 P$
„ „ „ infolge von Momenten, Enden gelagert		$c_1 M$
Schwingungen eines biegesteifen Seiles: Einspannung fest	20) S. 39	ω^2
Schwingungen eines biegesteifen Seiles: „ momentenfrei		
Schwingungen eines elastisch gebetteten Stabes	21) S. 39	„

2. Allgemeine Eigenwertprobleme.

Eingliedklasse $M[y] = (-1)^n \lambda [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$.

Elastisch gebetteter Druckstab	22) S. 39	P
Stabknickung, Enden eingespannt-gelenkig	23) S. 48	„
„ „ eingespannt	24) S. 48	„
Knicken schwerer Gestänge, Enden: gelenkig / eingespannt	25) S. 48	„
Stabknickung m.B.v. Eigengewicht	26) S. 48	„
Ausbeulen axial gedrückter freier Flanschenrohre	27) S. 48	p
Knicken einer kreiszylindrischen Hohlsäule durch axialen Druck	28) S. 48	$c_2 P$
Knickstab mit elastischer Zwischenstütze	29) S. 48	P
Stabknickung, Enden eingespannt und verschieblich	30) S. 48	„
Stabknickung, Enden eingespannt und elastisch gestützt	31) S. 48	„

(Fortsetzung).

$(\alpha y'')'' = \lambda \varrho F y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
„	$y_0 = y_0' = 0$	$y_l'' = y_l''' = 0$
„	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
„		$y_0'' = y_l'' = 0; \begin{cases} y_0 + c_1 y_0''' = 0 \\ y_l - c_1 y_l''' = 0 \end{cases}$
„	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = c_1 y_0';\ y_l'' = -c_1 y_l'$
		$y_0'' = c_1 y_0';\ y_l'' = -c_1 y_l'$ $y_0''' = -c_2 y_0;\ y_l''' = c_2 y_l$
$(\alpha y'')'' + P y'' = \lambda \varrho F y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$(\alpha y'')'' + (G y')' = \lambda \varrho F y$	$y_0 = y_0' = 0$	$y_l'' = y_l''' = 0$
$D y^{IV} - C y'' = \lambda \varrho J_p y$	$y_l = y_l' = 0$	$y_0'' = 0;\ C y_0' = D y_0'''$
„	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$D y^{IV} - C y'' = \lambda x^2 y$	$y_l = y_l' = 0$	$y_0'' = 0;\ C y_0' = D y_0'''$
$D y^{IV} - C y'' = \lambda y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$y^{IV} - c_1 y'' = \lambda c_2 y$	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$(\alpha y'')'' + c_1 y = \lambda c_2 y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$

$(\alpha y'')'' + \varkappa y = -\lambda y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0 = y_0' = y_l = 0$	$y_l'' = 0$
„	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
$(\alpha y'')'' - (G y')' = -\lambda y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
	$y_0 = y_0' = y_l = y \ = 0$	
$(\alpha y'')'' - (G y')' = -\lambda y''$	$y_l = y_0' = 0$	$y_l'' = (\alpha y'')_0' = 0$
$y^{IV} + \frac{v}{r^2} y'' + c_1 y = -\lambda c_2 y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$y^{IV} + c_1 y = -\lambda y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0 = y' = 0$	$y_0'' = 0,\ (\alpha y'')_l' = \frac{c}{2} y_l$
$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0' = y_l' = 0$	$y_0''' = y_l''' = 0$
„	„	$y''' + c_1 y_0 = y_l''' + c_2 y_l = 0$

Allgemeinere Probleme $M[y] = \lambda N[y]$. **Tafel I**

	Geknickte Schraubenfeder	[32]) S. 48	P
	Längsschwingung von Stäben m.B.v. Querkontraktion	[33]) S. 48	ω^2
	Biegeschwingung von Stäben m.B.v. rotatorischer Trägheit	[34]) S. 48	„
	Biegeschwing. einer Welle m.B.v. Kreiselwirkung	[35]) S. 48	„
	Kritische Drehzahlen m.B.v. Längsbelastung und Kreiselwirkung	[36]) S. 48	„
	Stabilität d. radial gedrückten Kreisbogens mit gelenkigen Enden (Kippen)	[37]) S. 48	
	„ mit eingespannten Enden	[38]) S. 48	
	Stabilität d. flachen Parabelbogens, Enden { gelenkig / eingespannt	[39]) S. 48	
	Kippen eines Stabes infolge Torsion	[40]) S. 48	Kippmoment
p Halbmesser a	Stabilität des radial gedrückten Kreisbogens in seiner Ebene. Äußerer Druck senkrecht auf der verzerrten Mittellinie. Enden { gelenkig	[41]) S. 48	$\frac{pa^3}{\alpha}$
	eingespannt	[42]) S. 48	„
	Wie eben, nur jetzt äußerer Druck zum Kreismittelpunkt gerichtet { Enden eingespannt	[43]) S. 48	„
	Biegeschwingung eines Kreisringes in seiner Ebene	[44]) S. 48	ω^2
	Biegeschwingung Kreisring bei konst. radialem Druck { in Ringebene { Vollring	[45]) S. 48	„
	Enden gelenkig		„
	„ eingesp.		„
	senkrecht z. Ringebene, Vollring		„
	Schwingung eines Kreisbogens senkrecht zu seiner Ebene	[46]) S. 48	„
	„ mit I-Profil und m.B.v. Flanschenbiegung		
	Schwingung eines dünnwandigen Hohlreifens	[47]) S. 48	„
	Torsionsstabilität des dünnwandigen Rohres	[48]) S. 48	

(Fortsetzung).

$-\alpha y'' = \lambda(y - c_1 y'')$	$y_0 = y_l = 0$	
$-E y'' = \lambda(y - c_1 y'')$	$y_0 = 0$	$y' = 0$
$\alpha y^{\mathrm{IV}} = \lambda(\varrho F y - I \varrho y'')$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$(\alpha y'')'' = \lambda(\varrho F y + (\bar{c} y')')$	$y_0 = y_l = 0$	$y'' = y_l'' = 0$
$(\alpha y'')'' + P y'' = \lambda(c_1 y + c_2 y'')$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$y^{\mathrm{IV}} + 2 y'' + y = \lambda(c_1 y - y'')$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
,,	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
$y^{\mathrm{IV}} + y'' = \lambda[4 x y''' + (2 - 3x^2) y'' - 4 x y']$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
,,	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
$y^{\mathrm{IV}} = \lambda[-(x^2 y')' + 2y]$	$y_l = y_0' = y_l = 0$	$y_0'' = 0$
$-(y^{\mathrm{VI}} + 2 y^{\mathrm{IV}} + y'') = \lambda(y^{\mathrm{IV}} + y'')$	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	$y_0''' = y_l''' = 0$
,,	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
$-(y^{\mathrm{VI}} + 2 y^{\mathrm{IV}} + y'') = \lambda(y^{\mathrm{IV}} + 2 y'')$	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
$-y^{\mathrm{VI}} + 2 y^{\mathrm{IV}} - y'' = c_1 \lambda(y - y'')$	Periodizität	
$-[y^{\mathrm{VI}} + (2 + c_1) y^{\mathrm{IV}} + (1 + c_1) y''] = \lambda[y^{\mathrm{IV}} + (2 - c_2) y'' + (1 + c_2) y]$	Periodizität	
,,	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	$y_0''' = y_l''' = 0$
,,	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
,, ; aber rechte Seite $= \lambda(y - c_2 y'')$	Periodizität	
$-(y^{\mathrm{VI}} + 2 y^{\mathrm{IV}} + y'') = \lambda(c_1 y^{\mathrm{IV}} - c_2 y'' + c_3 y)$	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
Gleichung 8. Ordnung		
$-y^{\mathrm{VI}} + \sum_{\nu=0}^{4} g_\nu(x) y^{(\nu)} = \lambda(y - y'')$	Periodizität	
Problem 8. Ordnung		

8. Probleme mit Besonderheiten.

λ tritt in den Randbedingungen auf.

Tafel I

	Schwing. eines herabhängenden Seiles mit Endmasse	[49]) S. 49	ω^2
	Dehnungsschwing. Stab mit Endmasse (Pfeiler)	[50]) S. 49	$c_1 \omega^2$
	Dampfturbinenscheibe, außen Beschaufelung — Torsionsschwing.	[51]) S. 49	,,
	Dampfturbinenscheibe, außen Beschaufelung — Dehnungsschwing.		,,
	Biegeschwingung Welle m.B.v. Kreiselwirkung, mit Scheibe („fliegende Welle")	[52]) S. 49	ω^2
	Biegeschwing. Stab mit Endmasse	[53]) S. 49	,,
	Knicken einer gedrückten Welle durch Moment	[54]) S. 49	M^2
	Knicken eines Stabes, Enden eingespannt und elastisch gestützt	[55]) S. 49	P
	Kippen eines Holm-Rippenrostes durch Biegemomente $M_1 = M_2$	[56]) S. 49	$c_1 M_1^2$
	$M_1 = -M_2$		,,
	$\|M_1\| \neq \|M_2\|$		

Differentialgleichung enthält λ und λ^2.

	Kippen eines Trägers unter Endlast m.B.v. Eigengewicht	[57]) S. 49	P
	Dehnungsschwing. zylindrischer Schalen	[58]) S. 49	ω^2
	Gedämpfte Schwingungen, z. B. eines Seiles	[59]) S. 49	$i\omega$
	Knicken einer tordierten Welle durch Druckkraft	[60]) S. 49	P
	Biegeschwingung v. Stäben m.B.v. Drehung und Winkeländerung des Stabelementes	[61]) S. 49	ω^2
	Schwingung elastischer Seile	[62]) S. 49	$c_2 \omega^2$
	Schwingung geschlossener Kugelschale bei gleichförm. Außendruck	[63]) S. 49	$c_7 \omega^2$

(Fortsetzung).

$-[(G+g\varrho F x)y']' = \lambda\varrho F y$	$y_l = 0$	$y'_0 + \frac{\lambda}{g} y_0 = 0$
$-y'' = \lambda y$		$y'_0 = 0,\ y'_l = \lambda c_2 y_l$
$(-x^3 h y')' = \lambda x^3 h y$		$y'(x_1) = c_2 y(x_1);\ y'_l = \lambda c_3 y_l$
$-y'' - y'\left(\frac{h'}{h}+\frac{1}{x}\right) - y\left(\frac{v}{x}\frac{h'}{h}-\frac{1}{x^2}\right) = \lambda y$		„ $;\ y'_l = (\lambda c_3 - c_1) y_l$
$(\alpha y'')'' = \lambda(\varrho F y + (c y')')$	$y_l = y' = 0$	$y''_0 = \lambda c_1 y'_0$ $y''_0 = \lambda(c_2 y_0 + c_3 y'_0)$
$(\alpha y'')'' = \lambda\varrho F y$	$y_l = y'_l = 0$	$y''_0 = 0,\ y'''_0 + c_1\lambda y_0 = 0$
$\alpha y^{IV} + 2Py'' + \frac{P^2}{\alpha} y = -\frac{\lambda}{\alpha} y''$	$y_0 = y_l = 0$	$(\alpha^2 y''' + (\alpha P + \lambda) y')_{0 \text{ und } l} = 0$
$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_l = y'_l = 0$	$y''_0 = c y_0 + \lambda y'_0 + (\alpha y'')'_0 = 0$
$-y^{VI} + 3c_2 y^{IV} = \lambda y^{IV}$ $-y^{VI} + c_2 y^{IV} = \lambda y^{IV}$ Gleichung 8. Ordnung	$y_0 = y'_0 = 0$ $y_l = y'_l = 0$	$y_0^{IV} + \lambda y''_0 = y_l^{IV} + \lambda y'_l = 0$

$-(Cy')' = \frac{1}{\alpha}\left(\lambda x + \frac{1}{2}\varrho g F x^2\right)^2 y$	$y_l = 0$	$y'_0 = 0$
$-y''\left(1 - \frac{c_1}{c_2-\lambda}\right) = \lambda c_3 y$	$y_0 = y_l = 0$	
$Sy'' = (\varrho F\lambda^2 + c_1\lambda) y$	$y_0 = y_l = 0$	
$\alpha y^{IV} + \frac{M^2}{\alpha} y'' = -2\lambda y'' - \frac{\lambda^2}{\alpha} y$	$y_0 = y_l = 0$	$(\alpha^2 y''' + (\alpha\lambda + M^2) y')_{0 \text{ und } l} = 0$
$c_1 y^{IV} = \lambda(-y'' - c_2 y) - \lambda^2 c_3 y$	$y_0 = y_l = 0$	$y''_0 = y''_0 = 0$
$c_1 y^{IV} + \lambda y'' + \lambda(\lambda - 1) y = 0$	$y_0 = y_l = 0$	$(y' + c_3 y''')_0 = (y' + c_3 y''')_l = 0$
$0 = LLL[y] + (c_1+\lambda)LL[y] +$ $(c_2 + c_3\lambda)L[y] + (c_4\lambda^2 + c_5\lambda + c_6) y$ mit $L[y] = y'' + \operatorname{ctg} x \cdot y' - \operatorname{ctg}^2 x \cdot y$		

Weitere Besonderheiten. Tafel I

	Schwingung eines frei herabhängenden Seiles		[64]) S. 49	ω^2
	Schwingung gedrückter Kreisplatten		[65]) S. 49	
	Rotationssymm. Knickung einer Kreisplatte	Rand eingespannt	[66]) S. 49	
		„ gestützt		
	Querschwing. einer Kreismembran		[67]) S. 49	$c_1\,\omega^2$
	Radialschwing. von Vollzylindern		[68]) S. 49	„
	„ „ Kugeln			„
	Knickung d. Bogenträgers		[69]) S. 49	
	Schwingung einer Kegelschale		[70]) S. 49	
	Kritische Kipplänge λ eines Stabes		[71]) S. 49	

[23]) BIEZENO-GRAMMEL 508.
[24]) H. HEINZERLING, Dissert. Karlsruhe 1938.
[25]) FR. A. WILLERS, ZaMM 21 (1941) 43.
[26]) AUERBACH-HORT IV_1, 101; Dieses Buch Nr. 1·3.
[27]) E. CHWALLA, ZaMM 10 (1930) 74.
[28]) Handbuch d. Physik VI, 299, 302; AUERBACH-HORT IV_1, 143.
[29]) A. SCHLEUSNER, Strenge Theorie d. Knickung u. Biegung, 1937, 115.
[30]) KLEMPERER-GIBBONS, ZaMM 13 (1933) 253.
[31]) Dieses Buch, Nr. 5·7.
[32]) BIEZENO-KOCH, ZaMM 5 (1925) 280; BIEZENO-GRAMMEL 550.
J. A. HARINGX, Proc. Akad. Amsterdam 45 (1942) 533, 650.
[33]) AUERBACH-HORT III, 320.
[34]) AUERBACH-HORT III, 322; S. TIMOSHENKO (1932) 251.
[35]) K. KARAS, Ing.-Archiv 1 (1930) 167; BIEZENO-GRAMMEL 821.
[36]) K. KARAS, Ing.-Archiv 1 (1930) 167.
[37]) AUERBACH-HORT IV_1, 127.
[38]) S. TIMOSHENKO, ZaMM 3 (1923) 360.
[39]) J. RATZERSDORFER (1936) 314—320.
[40]) R. SONNTAG, ZaMM 9 (1929) 378.
[41]) J. RATZERSDORFER (1936) 305—311.
[42]) P. FUNK, ZaMM 4 (1924) 143.
[43]) J. RATZERSDORFER (1936) 311—313.
[44]) Handbuch d. Physik VI, 374; AUERBACH-HORT III, 342.
[45]) K. FEDERHOFER, Ing.-Archiv IV (1933) 112, 115, 279, 283.
[46]) K. FEDERHOFER, ZaMM 20 (1940) 17.
[47]) K. FEDERHOFER, Ing.-Archiv 10 (1939) 129.
[48]) E. SCHWERIN, ZaMM 5 (1925) 238.

(Fortsetzung).

$-[g\varrho x y']' = \lambda \varrho y$	y_0 endlich, $y_l = 0$	
$(x y'')'' - \left(\frac{1}{x} y'\right)' + \frac{P}{N}(x y')' = \lambda c_1 x y$	$y_l = y_0' = y_l' = 0$	Limesbedingung
$-(x y')' + \frac{1}{x} y = \lambda x y$	y_0 endlich, $y_l = 0$	
,,	y_0 endlich	$y_l + c_1 y_l' = 0$
$-(x y')' + \frac{n^2}{x} y = \lambda x y$	y_0 endlich, $y_l = 0$	
,,	y_0 endlich	$y_l' = c_2 y_l$
$-(x^2 y')' + n(n+1) y = \lambda x^2 y$		
$y''' + y' + \lambda(g(x) y)' = 0$	$y_{-l} = y_l = 0$	$\int_{-l}^{l} y g(x)(\cos x - \cos l) dx = 0$
Diffgl. 2. Ordnung; enthält λ, λ^2, λ^3		
$y'' = c_1 x y$	$y(\lambda) = 0$	$y'(0) = 0$; Eigenwert = Länge des Grundintervalls

49) G. Hamel, Elementare Mechanik (1912) 536—539.
50) K. Ludwig, ZaMM 14 (1934) 361.
51) Biezeno-Grammel 657.
52) Biezeno-Grammel 803, 821.
53) F. Gassmann, Ing. Archiv 2 (1932) 222.
54) J. Ratzersdorfer (1936) 35.
55) Dieses Buch, S. 32.
56) Dieses Buch, Nr. 3·2; J. Weinhold, Ing. Archiv 9 (1938) 412.
57) L. Prandtl, Dissert. München 1899, 46.
58) Handbuch d. Physik VI, 395.
59) Frank-v. Mises, Differentialgl. u. Integralgl. I (1930) 469.
60) J. Ratzersdorfer (1936) 35.
61) Handbuch d. Physik VI, 359; S. Timoshenko (1932) 252.
62) R. Höger, ZaMM 14 (1934) 361; 15 (1935) 109.
63) K. Federhofer, ZaMM 15 (1935) 27.
64) G. Hamel, Elementare Mechanik (1912) 536.
65) Fr. A. Willers, ZaMM 20 (1940) 37.
66) Biezeno-Grammel 585; A. Nadai, Elastische Platten (1925) 251.
67) Auerbach-Hort III, 355.
68) Handbuch d. Physik VI, 399, 402.
69) A. Lockschin, ZaMM 16 (1936) 50.
70) K. Federhofer, Ing. Archiv 9 (1938) 293 oben.
71) H. v. Sanden, Praxis d. Diff.-Gleichungen. Berlin (1943) 51.

3·6. Eigenwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Hier werden kurz einige typische Beispiele aufgezählt, ohne daß auf ihre Herleitung eingegangen werden kann.

Die Querschwingungen einer homogenen Membran genügen der Gleichung

$$c^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{3·11}$$

Dabei ist $w = w(x, y, t)$ die Auslenkung der Membran an der Stelle x, y zur Zeit t; die Mittelebene der Membran bedeckt im Ruhezustand einen gegebenen Bereich B der x-y-Ebene. Weiter ist $c^2 = \frac{p}{\varrho}$ der Quotient aus der in der Membran herrschenden Vorspannung p und der Dichte ϱ, und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der LAPLACEsche Operator. Macht man wie in 2·1 für Eigenschwingungen den Ansatz $w(x, y, t) = z(x, y) e^{i\omega t}$ mit ω als Kreisfrequenz, so erhält man mit

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2}$$

die Differentialgleichung

$$-\Delta z = \lambda z. \tag{3·12}$$

Hierzu tritt noch als Randbedingung bei eingespanntem Rande $z = 0$, bei elastisch nachgiebigem Rande $\alpha z + \beta \frac{\partial z}{\partial n} = 0$, wo α und β am Rande gegebene Funktionen sind und n die Richtung der äußeren Normalen bedeutet.

Bei einer elliptischen Membran ist es zweckmäßig, elliptische Koordinaten einzuführen. Es entsteht dann die Differentialgleichung[1])

$$-\Delta z = \lambda (\sin^2 x + \mathrm{Sin}^2 y) \cdot z,$$

wobei rechts die Eigenfunktion z mit einer gegebenen „Belegungsfunktion" multipliziert auftritt.

Bei inhomogener Masse oder ungleichförmig gespannter Membran[2]) hat man die Differentialgleichung

$$-(A z_x + B z_y)_x - (B z_x + C z_y)_y = \lambda z \tag{3·13}$$

mit A, B, C als gegebenen Funktionen von x, y; tiefgestellte Indizes x, y bedeuten Ableitungen, also z. B. $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$.

Differentialgleichungen vierter Ordnung treten z. B. auf bei den Plattenschwingungen:

$$\Delta \Delta z = \lambda z.$$

---

[1]) F. POCKELS, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891.

[2]) Handbuch der Physik, Bd. VI, Berlin (1928), S. 381.

Tafel II. Einfache Beispiele technischer Eigenwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen.

Erklärung der benutzten Abkürzungen S. 39.

Technisches Problem	Differentialgleichung $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $z_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$ entsprechend z_y, z_{xx} usw.	Literaturhinweise
	Differentialgleichung 2. Ordnung $M[z] = \lambda p z$.	
Transversalschwingung einer homogenen Membran	$-\Delta z = \lambda z$	AUERBACH-HORT, III, 351 S. TIMOSHENKO, 326
Transversalschwingung bei Einführung anderer Koordinaten;	$-\Delta z = \lambda \cdot g(x, y) \cdot z$	Frank- v. Mises, Differential- u. Integralgleichungen, Bd. II (1935), 339
z. B. elliptische Membran	$-\Delta z = \lambda(\sin^2 x + \mathfrak{Sin}^2 y) z$	AUERBACH-HORT, III, 359
Transversalschwingung einer ungleichförmig gespannten Membran	$-(A z_x + B z_y)_x - (B z_x + C z_y)_y = \lambda z$	Handbuch d. Physik VI, 381
Transversalschwingung einer elastisch gebetteten Membran	$-\Delta z + c_1 z = \lambda z$	K. KLOTTER, Ing.-Archiv 3 (1932) 156
Knickung einer Platte mit quadratisch veränderlicher Steifigkeit	$-\Delta z = \frac{\lambda z}{c_1 + c_2(x^2 + y^2)}$	R. GRAN OLSSON, Ing.-Archiv 9 (1938) 206
Querschwingung einer schnell rotierenden dünnen Scheibe	$-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}[x(a^2 - x^2) z_x] - \frac{1 - c_1 x^2}{x^2} z_{yy} = \lambda z$	Handbuch d. Physik VI, 388
	Differentialgleichung 4. Ordnung $M[z] = \lambda p z$.	
Biegeschwingung einer dünnen Platte	$\Delta\Delta z = \lambda z$	A. NADAI, Elastische Platten (1925) 164 S. TIMOSHENKO, 335
Biegeschwingung einer elastisch gebetteten Platte	$\Delta\Delta z + c_1 z = \lambda z$	K. KLOTTER, Ing.-Archiv 3 (1932) 156
Biegeschwingung einer allseitig gedrückten Platte	$\Delta\Delta z + c_1 \Delta z = \lambda z$	K. FEDERHOFER, Ing. Archiv 6 (1935) 68
Biegeschwingung einer rotierenden Scheibe	$\Delta\Delta z - \frac{c_1}{x}\frac{\partial}{\partial x}[x(a^2 - x^2) z_x] - c_2\left(\frac{1}{x^2} - c_3\right) z_{yy} = \lambda z$	Handbuch d. Physik VI, 388

Tafel II (Fortsetzung).

Benennung	Differentialgleichung $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $z_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$ entsprechend z_y, z_{xx} usw.	Literaturhinweise
	Differentialgleichung der Form $M[z] = \lambda N[z]$.	
Knickung einer Platte unter einseitigem Druck	$\Delta \Delta z = -\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	A. NADAI, Elastische Platten (1925) 240 G. I. TAYLOR, Z. a. M. M. 13 (1933) 147 E. CHWALLA, Ing.-Archiv 5 (1934) 54
Knickung einer Platte unter allseitig gleichem Druck	$\Delta \Delta z = -\lambda \Delta z$	O. H. FAXÉN, Z. a. M. M. 15 (1935) 268 E. TREFFTZ, Z. a. M. M. 15 (1935) 339
Schubbeulung einer Platte	$\Delta \Delta z = -\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	E. SEYDEL, Ing.-Archiv 4 (1933) 169 E. TREFFTZ—FR. A. WILLERS, Z. a. M. M. 16 (1936) 336
Knickung einer Platte mit veränderlicher Biegesteifigkeit N (N in anderer Bedeutung als oben $N[z]$)	$\Delta(N \Delta z) + (1 - \nu)(2 N_{xy} z_{xy} - N_{xx} z_{xx} - N_{yy} z_{yy}) = -\lambda \Delta z$	R. GRAN OLSSON, Ing.-Arch. 9 (1938) 205
Knickung einer Kreiszylinderschale mit großem Halbmesser	$\frac{\partial^8 z}{\partial x^8} + c_1 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\lambda \frac{\partial^6 z}{\partial x^6}$	BIEZENO-GRAMMEL (1939) 607

Die einfachsten Randbedingungen sind

$$z = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ bei Einspannung}$$

und

$$z = 0, \qquad \Delta z = 0 \text{ bei freier Auflagerung.}$$

Anstatt weitere Beispiele aufzuzählen, verweisen wir auf die Zusammenstellung in Tafel II, die sich ebenso wie Tafel I auf Beispiele aus der Mechanik beschränkt. Es würde zu weit führen, auf die anderen großen Anwendungsbeispiele in der Physik, auf die Eigenwertprobleme in der Akustik, Strömungslehre, Elektrizitätslehre, Kernphysik usw. einzugehen; es sei nur

als eines der bekanntesten Eigenwertprobleme das der SCHRÖDINGER-Gleichung genannt[1]):

$$(3{\cdot}14) \qquad \Delta\psi + \frac{8\,\pi^2 m}{h^2}\left(\lambda - U(x, y, z)\right)\psi = 0,$$

wobei m, h Konstanten, $U(x, y, z)$ als potentielle Energie eine gegebene Funktion des Ortes x, y, z, weiter ψ die Eigenfunktion und λ der Energieeigenwert ist. Als Randbedingung hat man Verschwinden von ψ im Unendlichen.

In Tafel II sind dieselben Abkürzungen wie in Tafel I verwendet, man findet sie in 3·5 zusammengestellt.

2. Kapitel.

Mathematische Hilfsmittel.

§§ 4 und 5 bringen einige in den folgenden Kapiteln immer wieder benutzte grundlegende Definitionen und einfache Sätze aus der mathematischen Lehre von den Eigenwerten und der Theorie der Differentialgleichungen. §§ 6 und 7 sollen den Leser in hauptsächlich referierender Weise in die Gebiete der partiellen Differentialgleichungen und der Integralgleichungen einführen.

§ 4. Grundtatsachen über Eigenwertprobleme.

Allgemeine Definition des Eigenwertproblems: Probleme folgender Art heißen Eigenwertprobleme[2]): Gegeben ist eine lineare homogene (gewöhnliche oder partielle) Differentialgleichung für eine Funktion z von einer oder mehreren Veränderlichen $x_1, \ldots, x_r$. Die Koeffizienten, mit denen z und seine Ableitungen in der Differentialgleichung multipliziert vorkommen, sind gegebene Funktionen von den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_r$ und von einem Parameter λ. Ferner sind eine Anzahl linearer homogener Randbedingungen für z vorgeschrieben, d. h. Gleichungen, die in den Werten von z und seinen Ableitungen, genommen an irgendwelchen gegebenen Stellen des $x_1, \ldots, x_r$-Raumes, linear homogen sind. Gesucht sind Werte

[1]) Näheres bei G. JOOS, Lehrbuch der theoretischen Physik, 3. Aufl., Leipzig 1939, S. 605. Frank- v. Mises, Differential- und Integralgleichungen, Bd. II, 2. Aufl. Braunschweig 1935, S. 992—1044.

[2]) Man spricht auch bei Matrizen, Integralgleichungen und überhaupt auch bei anderen linearen homogenen Problemen von „Eigenwerten", hier wird jedoch fast ausschließlich nur von Eigenwerten bei Differentialgleichungen die Rede sein.

des Parameters λ, für die es eine nicht identisch verschwindende Funktion z gibt, die allen Randbedingungen und der Differentialgleichung genügt.

Vorerst betrachten wir nur gewöhnliche Differentialgleichungen und schreiben y statt z.

4·1. Beispiele für verschiedene Erscheinungen bei Eigenwertproblemen. Bei dem ersten Eigenwertproblem, das in 1·1 betrachtet wurde, hatte sich eine Folge von abzählbar unendlich vielen reellen, sogar positiven Eigen werten ergeben, und die gleiche Erscheinung findet man bei den meisten technisch vorkommenden Eigenwertaufgaben. Die folgenden einfachen Beispiele zeigen jedoch, daß keineswegs bei jedem beliebigen Eigenwertproblem eine solche „normale" Eigenwertverteilung auftritt; das Vorhandensein einer solchen normalen Verteilung ist nur unter gewissen Voraussetzungen gesichert, und es ist daher nötig, die Erscheinungen genauer mathematisch zu untersuchen.

Beispiel I. Kein Eigenwert vorhanden. Vorgelegt sei das Eigenwertproblem [in der Differentialgleichung schreiben wir weiterhin $y(x)$ für die gesuchte Eigenfunktion, Striche bedeuten Ableitungen nach x][1]:

$$y^{IV} = -\lambda y'' \tag{4·1}$$

mit den Randbedingungen

$$y''(0) = y'''(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

Dieses Problem unterscheidet sich äußerlich nur wenig von dem der Biegeschwingungen von Stäben oder der Knickung.

Hieße die Differentialgleichung $y^{IV} = \lambda y$, so hätten wir genau die Biegeschwingungen des bei $x = 1$ eingespannten und am anderen Ende $x = 0$ freien Stabes vor uns. Die Differentialgleichung und drei von den vier Randbedingungen sind dieselben wie beim Knickproblem für den eingespannt-freien Stab (eine andere Formulierung als in 1·1). Nur die vierte Randbedingung $y'''(0)$ ist dort durch die Randbedingung $(\alpha y'')'_{x=0} = -\lambda y'(0)$ oder wegen $y''(0) = 0$ durch $\alpha y_0''' = -\lambda y_0'$ zu ersetzen. Bei den beiden genannten physikalischen Problemen haben wir natürlich normale Eigenwertverteilungen vor uns, hier dagegen gibt es überhaupt keine Eigenwerte! Bereits kleine Abänderungen des Problems können also den Charakter der Eigenwertverteilung völlig verändern.

Für $\lambda = 0$ hat nämlich die Differentialgleichung $y^{IV} = 0$ die Lösung $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$; sie führt bei den gegebenen Randbedingungen

[1]) Ob man λ oder $-\lambda$ schreibt, ist an sich gleichgültig. Jedoch ist es im allgemeinen zweckmäßig, die Differentialgleichung so zu schreiben, daß y, y^{IV}, ... mit positiven Vorzeichen, y'', y^{VI}, ... mit negativen Vorzeichen auftreten, dann sind die Eigenwerte bei „normaler" Eigenwertverteilung gewöhnlich positiv.

zu $y \equiv 0$ und scheidet daher aus. Für $\lambda \neq 0$ lautet mit $\lambda = k^2$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(4·2) $$y = c_1 + c_2 x + c_3 \sin k x + c_4 \cos k x .$$

Die Randbedingung $y''(0) = 0$ verlangt $c_4 = 0$, und $y'''(0) = 0$ führt auf $c_3 = 0$, $y'(1) = 0$ auf $c_2 = 0$ und $y(1) = 0$ auf $c_1 = 0$;

es gibt also keinen Eigenwert und keine Eigenfunktion.

Beispiel II. Komplexe Eigenwerte. Wir betrachten dieselbe Differentialgleichung (4·1) mit anderen Randbedingungen:

$$y^{IV} = -\lambda y'',$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0 .$$

Bei $\lambda = 0$ hat man als Lösungen der Differentialgleichung wieder Polynome höchstens dritten Grades, aber die Randbedingungen erfüllt nur $y \equiv 0$. Für $\lambda \neq 0$ ist wie im Beispiel I die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch (4·2) gegeben. Die Randbedingung

$$\begin{aligned} y''(0) &= 0 \text{ ergibt } c_4 = 0, \\ y(0) &= 0 \text{ ergibt } c_1 = 0, \\ y'(0) &= 0 \text{ ergibt } c_2 + k c_3 = 0, \text{ also } c_2 = -k c_3, \\ y(1) &= 0 \text{ ergibt } -k c_3 + c_3 \sin k = 0, \end{aligned}$$

mithin, wenn wir $c_3 = 0$ wegen $y \not\equiv 0$ ausschließen,

$$\sin k = k .$$

Diese Gleichung hat im Reellen nur die oben ausgeschlossene Wurzel $k = 0$ und sonst komplexe Wurzeln, es gibt hier also nur komplexe Eigenwerte.

Es gibt auch physikalische Probleme, die auf komplexe Eigenwerte führen, z. B. gedämpfte Schwingungen einer Saite [mit $S =$ const: vgl. Gl. (2·2), K als Dämpfungskonstante]:

(4·3) $$S y'' = \varrho F \ddot{y} + K \dot{y} .$$

Dieselbe Differentialgleichung tritt auch bei gedämpften anderen Schwingungen, z. B. Torsionsschwingungen von Stäben und Wellen, Telegraphengleichung usw. auf[1]).

Mit dem Ansatz

$$y(x, t) = e^{\lambda t} Y(x)$$

geht (4·3) über in

$$S y'' = (\varrho F \lambda^2 + K \lambda) y$$

oder mit anderen Bezeichnungen (k_1, k_2 positive Konstante):

$$y'' = (k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda) y$$

---

[1]) Frank und v. Mises, Differential- und Integralgleichungen, Bd. I (1930) 469.

Bei den Randbedingungen (Länge der Saite $l = 1$)

$$y(0) = y(1) = 0$$

hat man die Lösungen

$$y = \sin n\pi x$$

mit

$$k_1\lambda^2 + k_2\lambda = -n^2\pi^2.$$

Die daraus berechneten Eigenwerte λ sind im allgemeinen, z. B. bei nicht zu großen Werten von k_2, komplex.

Beispiel III. Auftreten des Eigenwertes in den Randbedingungen. Bei dem Eigenwertproblem

$$-y'' = \lambda y$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0,$$
$$y(1) = k(\lambda)\, y'(1)$$

sei $k(\lambda)$ eine gegebene Funktion von λ. Mit der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x$$

(es ist $\lambda = \omega^2$ gesetzt) erhält man bei Einsetzen in die Randbedingungen für ω die transzendente Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} \omega}{\omega} = k(\omega^2). \tag{4·4}$$

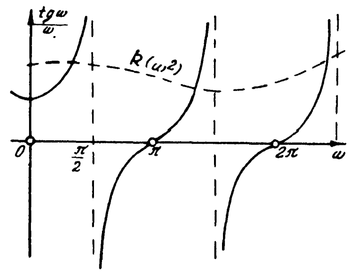


Abb. 4·1. Graphische Darstellung zur Lösung der Gleichung (4·4).

Die Schnittpunkte der Kurven $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\omega}$ und $k(\omega^2)$ ergeben die Eigenwerte (Abb. 4·1). Je nachdem, wie die Funktion $k(\lambda)$ beschaffen ist, kann alles eintreten, es kann unendlich viele, endlich viele oder auch gar keine Eigenwerte geben $\left(\text{z. B. wenn } k(\omega^2) = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\omega} - 1 \text{ ist}\right)$.

4·2. Bezeichnungen. Schon die wenigen einfachen Beispiele der letzten Nummer 4·1 zeigen, daß man Aussagen über Anzahl und Lage der Eigenwerte und über die Eigenfunktionen nur wird erwarten dürfen, wenn man nicht ganz beliebige Eigenwertprobleme zuläßt. Wir greifen daher im folgenden, geleitet von den in technischen Problemen vorgekommenen Fällen, eine ganz bestimmte Klasse von Eigenwertproblemen heraus.

Die Differentialgleichung laute

(4·5) $$M[y] = \lambda \cdot N[y],$$

wobei die Ausdrücke $M[y]$ und $N[y]$ lineare homogene gewöhnliche Differentialausdrücke der Gestalt[1])

(4·6) $$M[y] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} [f_{\nu}(x) \cdot y^{(\nu)}(x)]^{(\nu)},$$

(4·7) $$N[y] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} [g_{\nu}(x) \cdot y^{(\nu)}(x)]^{(\nu)}$$

sind. Die $f(x)$ und $g_{\nu}(x)$ sind dabei gegebene, reelle, ν-mal stetig differenzierbare Funktionen[2]).

Es sei $m > n$; dann ist also $2m$ die Ordnung der Differentialgleichung und $2n$ die Ordnung des mit dem Eigenwert λ multiplizierten Ausdrucks. Ferner wird vorausgesetzt:

$$f_m \neq 0, \quad g_n \neq 0, \quad m > n \geq 0.$$

Je nachdem, ob $n = 0$ oder $n > 0$ ist, hat man die folgenden zwei Fälle:

1. Fall $n = 0$: Dann ist $N[y] = g_0 \cdot y$, und man hat die beiden obersten Gruppen in der Tafel I. Diese Probleme nennen wir „Spezielle Eigenwertprobleme“[3]).

2. Fall $n > 0$: Das sind in der Tafel I die Probleme der dritten und vierten Gruppe, die auch „Allgemeine Eigenwertprobleme“ heißen.

Zu der Differentialgleichung der Ordnung $2m$ kommen noch $2m$ lineare homogene Randbedingungen

(4·8) $$U_{\mu}[y] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Das sind lineare homogene Gleichungen zwischen den Werten von y und seinen Ableitungen bis zur $(2m-1)$-ten Ordnung an zwei festen Stellen $x = a$ und $x = b$. Eine solche Randbedingung ist von der Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{2m-1} \left(\alpha_{\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\nu} y^{(\nu)}(b)\right) = 0,$$

---

[1]) (4·6) ist nicht die allgemeine Gestalt für lineare homogene gewöhnliche Differentialausdrücke, sondern erfaßt nur den Spezialfall der sog. „selbstadjungierten“ Differentialausdrücke.

[2]) Man sieht, daß (4·6) und (4·7) die Bauart der meisten bei technischen Problemen aufgetretenen Eigenwert-Differentialgleichungen wiedergibt, z. B. ordnet sich Gl. (1·5) hier ein mit

$$\alpha(x) = f_2, \quad G(x) = f_1, \quad P = \lambda, \quad f_0 = g_0 = 0, \quad g_1 = 1.$$

[3]) Wir haben hier die Voraussetzung $g_0(x) \neq 0$ getroffen. In der Literatur ist auch der „polare“ Fall, daß die stetige Funktion $g_0(x)$ das Vorzeichen wechselt, behandelt; z. B. bei E. Kamke, Math. Z. 45 (1939) 759.

wobei die α_ν und β_ν gegebene reelle nicht sämtlich verschwindende Konstanten (oder auch manchmal gegebene Funktionen des Eigenwertes λ) sind. Die $2m$ Randbedingungen (4·8) sollen voneinander linear unabhängig sein.

Die Randbedingungen werden eingeteilt in wesentliche und restliche Randbedingungen[1]):

Definition: *Man suche aus möglichst vielen der $2m$ gegebenen Randbedingungen* (4·8) *die Ableitungen m-ter und höherer Ordnung durch lineare Kombination der Randbedingungen zu entfernen. So mögen k Randbedingungen entstehen, die nur Ableitungen bis zur höchstens* $(m-1)$*-ten Ordnung enthalten und „wesentliche Randbedingungen" genannt werden, während sich aus keiner der* $(2m-k)$ *übrigen Randbedingungen alle Ableitungen von m-ter und höherer Ordnung entfernen lassen; die letztgenannten heißen „restliche Randbedingungen".*

Sind z. B. bei einem Problem zweiter Ordnung[2]) $(m=1)$ die Randbedingungen $y(a)+y'(a)=0$, $y(b)+2y'(a)=0$ vorgelegt, so kann man durch lineare Kombination die neue Randbedingung $2y(a)-y(b)=0$ herleiten, in der die erste Ableitung nicht mehr auftritt; aber man kann keine weitere von dieser eben genannten linear unabhängige Randbedingung aufstellen, in der keine Ableitung vorkommt. Man hat also in diesem Falle eine wesentliche Randbedingung, nämlich $2y(a)-y(b)=0$, und eine restliche Randbedingung, etwa $y(a)+y'(a)=0$.

In der Tafel I findet man die Randbedingungen bereits in diese beiden Gruppen aufgeteilt.

Für einen bequemeren Sprachgebrauch empfiehlt es sich weiterhin, eine Einteilung vorkommender Funktionen vorzunehmen. Wir stellen folgende

---

1) E. KAMKE, Math. Z. 48 (1942) 67—100.

2) Für spezielle Probleme findet man in der Literatur noch folgende Bezeichnungen:

Bei Differentialgleichungen 2. Ordnung $(m=1)$ nennt man die Bedingungen

$y(a)=y(b)=0$ Randbedingungen erster Art,

$y'(a)=y'(b)=0$ „ zweiter Art,

$c_1 y(a)+c_2 y'(a)=d_1 y(b)+d_2 y'(b)=0$ Randbedingungen dritter Art,

oder auch STURMSCHE Randbedingungen.

Bei BIEZENO-GRAMMEL, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 136, werden bei Problemen zweiter und vierter Ordnung in Anlehnung an mechanische Vorstellungen die wesentlichen Randbedingungen als geometrische, die restlichen als dynamische bezeichnet.

drei Klassen reeller Funktionen auf, von denen immer eine Klasse eine Verengung (Teilmenge) der vorhergehenden Klasse darstellt.

1. „*Zulässige Funktionen*“, *sie erfüllen die wesentlichen Randbedingungen und sind m-mal stetig differenzierbar.*

2. „*Vergleichsfunktionen*“, *sie erfüllen alle Randbedingungen und sind 2 m-mal stetig differenzierbar.*

3. „*Eigenfunktionen*“, *sie erfüllen alle Randbedingungen und die Differentialgleichung.*

Die Funktion $u \equiv 0$ *ist dabei von diesen drei Klassen ausgeschlossen.*

Anmerkung: Die Begriffe „zulässige Funktionen“ und „Vergleichsfunktionen“ werden hier nur festgelegt für den Fall, daß der Eigenwert λ in den Randbedingungen nicht auftritt.

4·3. Der Begriff „selbstadjungiert“. Die bisher vorgenommenen Einschränkungen sind immer noch nicht scharf genug. Bei den Beispielen I und II in 4·1 haben die Differentialgleichungen die Bauart, die durch (4·5) bis (4·7) vorgeschrieben ist; dennoch haben wir eine nicht normale Eigenwertverteilung vor uns. Das liegt bei diesen beiden Beispielen an den Randbedingungen; es ist bei ihnen die im folgenden zu besprechende Bedingung der „Selbstadjungiertheit“ verletzt. Diese Bedingung wird bei den folgenden Untersuchungen sehr häufig benutzt werden[1]).

Es sei a, b das Intervall, in welchem die Differentialgleichung des Problems betrachtet wird. Gewöhnlich werden $x = a$ und $x = b$ auch die Stellen sein, die in den Randbedingungen auftreten. Dann lautet die

Definition der Selbstadjungiertheit: *Das vorgelegte Eigenwertproblem* (4·5), (4·8) *heißt selbstadjungiert, wenn für zwei beliebige Vergleichsfunktionen* u, v *gilt*

$$(4.9)\qquad \begin{cases} \int\limits_a^b (u M[v] - v M[u])\, dx = 0, \\ \int\limits_a^b (u N[v] - v N[u])\, dx = 0. \end{cases}$$

Ob ein vorgelegtes Eigenwertproblem selbstadjungiert ist oder nicht, kann man stets leicht durch Teilintegration feststellen.

---

[1]) Der Name „selbstadjungiert“ stammt aus einer Theorie, bei der man jeder gewöhnlichen linearen Differentialgleichung eine zu ihr „adjungierte“ zuordnet. Wir gehen hier nicht weiter auf diese Theorie ein.

Z. B. ist das Eigenwertproblem

$$-y'' = \lambda y; \quad y'(0) = A y(0), \quad y'(l) = B y(l)$$

selbstadjungiert; dabei sind A und B gegebene Zahlen oder dürfen sogar Funktionen von λ sein. Für zwei Funktionen u, v, welche die Randbedingungen erfüllen, ist nämlich

$$\int_0^l \{u(-v'') - v(-u'')\}\, dx = [-uv' + vu']_0^l + \int_0^l (u'v' - v'u')\,dx = 0,$$

denn wenn man

$$u'(0) = A u(0), \quad u'(l) = B u(l), \quad v'(0) = A v(0), \quad v'(l) = B v(l)$$

einsetzt, heben sich alle Ausdrücke fort.

Allgemein kann man die Selbstadjungiertheit mit Hilfe von Teilintegrationen folgendermaßen nachprüfen:

Man hat in (4·9) den Ausdruck zu bilden:

$$\int_a^b u M[v]\,dx = \int_a^b u \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu)}\,dx.$$

Es wird ein einzelnes Glied der Summe herausgegriffen und ν-mal Teilintegration angewendet:

$$(4{\cdot}10) \quad \begin{cases} (-1)^\nu \int_a^b u [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu)}\,dx \\ = (-1)^\nu [u [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1)}]_a^b + (-1)^{\nu-1} \int_a^b u' [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1)}\,dx = \cdots \\ = (-1)^\nu \left[u [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu-1)} - u' [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu-2)} + u'' [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu-3)} - + \cdots\right]_a^b \\ \quad + \int_a^b u^{(\nu)} f_\nu(x) v^{(\nu)}\,dx. \end{cases}$$

Ebenso formt man das entsprechende, bei $\int_a^b v M[u]\,dx$ auftretende Glied um und erhält so, da die Integrale rechts sich gegenseitig fortheben, auf der rechten Seite nur noch Randglieder[1]):

$$(-1)^\nu \int_a^b \{u [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu)} - v [f_\nu u^{(\nu)}]^{(\nu)}\}\,dx$$
$$= \left[\sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+\varrho} \{ u^{(\varrho)} [f_\nu(x) \cdot v^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)} - v^{(\varrho)} [f_\nu(x) u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)} \} \right]_a^b.$$

[1]) Wie auch sonst in der Summenschreibweise üblich, bedeutet die Summe für $\nu = 1$ nur das eine Glied mit $\varrho = 0$, und für $\nu = 0$ ist die Summe leer und durch die Zahl 0 zu ersetzen.

Diese Summen hat man für jedes Glied des Differentialausdruckes zu bilden und über ν zu summieren. Dann erhält man die sogenannte DIRICHLET*sche Umformung*[1]:

$$(4{\cdot}11)\left\{\begin{aligned}&\int\limits_a^b (u M[v] - v M[u])\, dx\\&= \left[\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}(-1)^{\nu+\varrho}\{u^{(\varrho)}[f_\nu(x)\cdot v^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)} - v^{(\varrho)}[f_\nu(x)\, u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)}\}\right]_a^b.\end{aligned}\right.$$

Sind die Randbedingungen so beschaffen, daß die Summe verschwindet, sowohl beim Differentialausdruck M als auch bei N, so ist das Problem selbstadjungiert.

Fast alle Probleme der Tafel I sind selbstadjungiert, aber nicht alle. Eine Ausnahme bilden z. B. die Biegeschwingungen der „fliegenden" Welle mit Kreiselwirkung und Scheibe am Ende. Dabei lautet nämlich die eine Randbedingung $y_0''' = \lambda(c_2 y_0 + c_3 y_0')$. Durch den Term y_0' wird hierbei das Problem nicht selbstadjungiert.

Ferner sind alle Probleme der Tafel VII, soweit die Randbedingungen einzeln genannt sind, selbstadjungiert, man muß also bei einem Problem von diesem Typus die Selbstadjungiertheit nicht in jedem Einzelfalle neu nachprüfen.

Wir besprechen einige einfache Folgerungen aus der Selbstadjungiertheit.

4·4. Die verallgemeinerte Orthogonalität. Wir machen die Annahme, die Eigenwertaufgabe (4·5), (4·8) besitze Eigenwerte λ und Eigenfunktionen y und sei selbstadjungiert. Es seien λ_i und λ_k zwei verschiedene Eigenwerte mit den dazugehörigen Eigenfunktionen y_i und y_k. Es ist also

$$M[y_i] = \lambda_i N[y_i]$$

und

$$M[y_k] = \lambda_k N[y_k]\,.$$

Dann folgt aus der Selbstadjungiertheit, da die Eigenfunktionen selbstverständlich Vergleichsfunktionen sind:

$$0 = \int\limits_a^b (y_i M[y_k] - y_k M[y_i])\, dx$$

---

[1]) PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET, deutscher Mathematiker, geboren als Sohn eines Posthalters am 13. Februar 1805 in Düren (Reg.-Bez. Aachen), lebte längere Zeit (von 1822 an) im Hause des Generals FOY in Paris, wurde 1827 Dozent an der Universität Breslau, siedelte 1829 nach Berlin über, wurde 1831 a. o. und 1839 o. Professor der Mathematik an der Universität Berlin, 1832 Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, nach GAUSS' Tode 1855 Professor in Göttingen, wo er am 5. Mai 1859 starb.

oder bei Benutzung der Differentialgleichung für die Eigenfunktionen

$$0 = \lambda_k \int_a^b y_i N[y_k]\,dx - \lambda_i \int_a^b y_k N[y_i]\,dx .$$

Die beiden Integrale sind einander gleich (wieder wegen der Selbstadjungiertheit), also

$$0 = (\lambda_k - \lambda_i) \int_a^b y_i N[y_k]\,dx .$$

Wegen $\lambda_k \neq \lambda_i$ folgt somit

$$\int_a^b y_i N[y_k]\,dx = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_k . \tag{4·12}$$

Man nennt zwei in einem Intervall a, b definierte integrierbare Funktionen $\psi(x)$, $\varphi(x)$ „orthogonal", wenn $\int_a^b \varphi\psi\,dx = 0$ ist. Hier gilt nun nicht einfach

$$\int_a^a y_i y_k\,dx = 0, \quad \text{sondern es ist} \quad \int_a^b y_i N[y_k]\,dx = 0 .$$

Man sagt: die Funktionen y_i und y_k sind in „verallgemeinertem Sinne orthogonal".

Ersetzt man im Falle $\lambda_k \neq 0$ in (4·12) $N[y_k]$ durch $\frac{1}{\lambda_k} M[y_k]$, so folgt

$$\int_a^b y_i M[y_k]\,dx = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_k . \tag{4·13}$$

Diese Gleichung gilt auch im Falle $\lambda_k = 0$, da dann $M[y_k] \equiv 0$ ist.

Satz: *Ist die Eigenwertaufgabe $M[y] = \lambda N[y]$ mit den Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ selbstadjungiert und besitzt sie zwei voneinander verschiedene Eigenwerte λ_i, λ_k mit y_i, y_k als zugehörigen Eigenfunktionen, so sind diese im verallgemeinerten Sinne orthogonal, d. h. es gelten die Beziehungen* (4·12), (4·13).

Spezialfälle. Bei den speziellen Eigenwertproblemen $M[y] = \lambda g_0(x) \cdot y$ lautet die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_a^b g_0(x)\, y_i(x)\, y_k(x)\,dx = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_k . \tag{4·14}$$

Hier sind also die Funktionen $\sqrt{g_0} \cdot y_i$ und $\sqrt{g_0} \cdot y_k$ im gewöhnlichen Sinne orthogonal.

Hat $N[y]$ die spezielle Gestalt $(g_n(x)\, y^{(n)})^{(n)}$ und kommen unter den Randbedingungen die Forderungen vor, daß $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ an beiden

Rändern a und b verschwinden, so folgt durch n-malige Teilintegration

$$(4\cdot15) \qquad \int_a^b y_i N[y_k]\,dx = \int_a^b g_n y_i^{(n)} y_k^{(n)}\,dx = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_k\,.$$

Dann sind also die Funktionen $\sqrt{g_n}\, y_i^{(n)}$ orthogonal im gewöhnlichen Sinne.

Ein Beispiel zur verallgemeinerten Orthogonalität. Das Knickproblem für einen beiderseits eingespannten Stab der Länge $l = 1$ lautet (vgl. 1·2): $y^{\mathrm{IV}} = -\lambda y''$ mit $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$. Die ungeraden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \ldots$ sind gegeben durch

$$\lambda_{2r-1} = 4r^2\pi^2 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

die geraden Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_4, \ldots$ durch

$$\lambda_{2r} = 4z_r^2 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei z_r die r-te positive Wurzel der transzendenten Gleichung $\operatorname{tg} z = z$ ist.

Die zu den ungeraden Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen wechseln im Grundgebiet das Vorzeichen nicht, hier gilt also nicht mehr die Orthogonalität im gewöhnlichen Sinne; z. B. sind y_1, y_3 sicher nicht orthogonal. Wohl aber gilt (4·12)

$$\int_0^1 y_i y_k''\,dx = 0 \quad \text{für } i \neq k\,.$$

Wegen $y_i(0) = y_i(1) = 0$ kann man dafür schreiben

$$\int_0^1 y_i' y_k'\,dx = 0\,,$$

d. h. die y_i' bilden ein orthogonales Funktionensystem (Abb. 4·2). Außerdem sind aus dem gleichen Grunde alle y_i' zur Funktion $u \equiv 1$ orthogonal. Die Gleichung (4·13) besagt hier, daß auch die Funktionen y_i'' für sich ein Orthogonalsystem bilden.

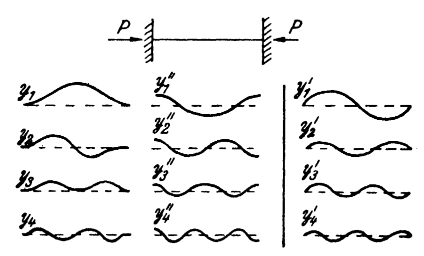


Abb. 4·2. Knickproblem. Die y_i' und die y_i'' bilden je ein Orthogonalsystem von Funktionen.

4·5. Realität der Eigenwerte. Wir fragen jetzt, ob die Eigenwertaufgabe (4·5), (4·8), die wir als selbstadjungiert voraussetzen und bei der wie bisher alle Koeffizienten der Differentialgleichung reell sein sollen, komplexe Eigenwerte haben kann.

Zu einer reellen Eigenfunktion y mit $N[y] \not\equiv 0$ gehört notwendig ein reeller Eigenwert. Daher gehört zu einem komplexen Eigenwert $\lambda = s + it$ (mit s, t reell, $t \neq 0$) bei $N[y] \not\equiv 0$ notwendig eine komplexe Eigenfunktion $y(x) = u(x) + iv(x)$ (mit u, v reell). Dann ist auch, da die Koeffizienten

der Differentialgleichung und die Konstanten in den Randbedingungen reell sind, der konjugiert komplexe Wert $\bar{\lambda} = s - it$ ein Eigenwert mit der Eigenfunktion $\bar{y} = u - iv$. Wegen der vorausgesetzten Selbstadjungiertheit ist dann

$$0 = \int_a (y M[\bar{y}] - \bar{y} M[y]) dx .$$

Nun gilt

$$M[\bar{y}] = \bar{\lambda} N[\bar{y}], \qquad M[y] = \lambda N[y],$$

also

$$0 = \bar{\lambda} \int_a^b y N[\bar{y}] dx - \lambda \int_a^b \bar{y} N[y] dx$$

oder wieder wegen der Selbstadjungiertheit

$$0 = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b y N[\bar{y}] dx . \tag{4·16}$$

Nun ist

$$\bar{\lambda} - \lambda = -2it .$$

Ist also das Integral $\int_a^b y N[\bar{y}] dx \neq 0$, so folgt daraus $t = 0$, d. h. es können nur reelle Eigenwerte auftreten. Das Integral hat wegen

$$N[u - iv] = N[u] - iN[v]$$

den Wert:

$$\int_a^b (u + iv) N[u - iv] dx = \int_a^b u N[u]\, dx + i \int_a^b (v N[u] - u N[v]) dx + \int_a^b v N[v] dx .$$

Hier verschwindet der imaginäre Bestandteil, da mit y auch der Realteil u und der Imaginärteil v Vergleichsfunktionen sind. Das Integral lautet also

$$\int_a^b y N[\bar{y}] dx = \int_a^b (u N[u] + v N[v]) dx .$$

Es hat bei den speziellen Eigenwertproblemen mit $N[y] = g_0(x) y$ den Wert

$$\int_a^b g_0(x) (u^2 + v^2) dx$$

und ist, da identisches Verschwinden von u und v ausgeschlossen ist, von Null verschieden, wenn $g_0(x)$ festes Vorzeichen hat. Dann sind also alle Eigenwerte reell.

Allgemein gilt der

Satz: *Hat die Eigenwertaufgabe* (4·5), (4·8) *reelle Koeffizienten, ist sie selbstadjungiert und nimmt* $\int_a^b u N[u] dx$ *für alle Vergleichsfunktionen* u *ein festes Vorzeichen an, so sind alle vorhandenen Eigenwerte reell. Die letztgenannte Voraussetzung ist z. B. bei den speziellen Eigenwertproblemen erfüllt, wenn* $g_0(x)$ *ein festes Vorzeichen hat.*

4·6. Die Dirichletsche Formel. Zur näheren Untersuchung der im letzten Satz aufgetretenen Voraussetzung liegt es nahe, allgemein die Integrale

$$\int_a^b u M[u] dx \quad \text{und} \quad \int_a^b u N[u] dx$$

zu betrachten; man kann sie genau so wie die Integrale in (4·9) durch Teilintegration umformen. $M[u]$ bedeutet die Summe (4·6), und von dieser Summe wird wie in 4·3 ein einzelnes Glied herausgegriffen. Das Ergebnis der Teilintegration lautet [es ist bereits in der Gl. (4·10) enthalten, wenn man dort $u = v$ setzt]:

$$(-1)^{\nu} \int_a^b u [f_\nu u^{(\nu)}]^{(\nu)} dx = \left[\sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+\varrho} u^{(\varrho)} [f_\nu u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)}\right]_a^b + \int_a^b f_\nu u^{(\nu)2} dx .$$

Summiert man über ν, so folgt die sogenannte DIRICHLETsche Formel

$$(4·17) \qquad \begin{cases} \int_a^b u M[u] dx = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu u^{(\nu)2} dx + M_0[u] \\ \text{mit} \\ M_0[u] = \left[\sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+\varrho} u^{(\varrho)} [f_\nu u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)}\right]_a^b . \end{cases}$$

$M_0[u]$ heißt der DIRICHLET*sche Randteil.*

Genau so kann man für $N[u]$ die Formel aufstellen:

$$(4·18) \qquad \int_a^b u N[u] dx = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu u^{(\nu)2} dx + N_0[u]$$

mit dem entsprechend zu $M_0[u]$ gebildeten DIRICHLETschen Randteil $N_0[u]$.

Beispiel. Für das bereits in 4·3 betrachtete Eigenwertproblem

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) = A y(0), \quad y'(l) = B y(l)$$

Tafel III. DIRICHLETsche Randteile.

Differentialgleichung und RAYLEIGHscher Quotient $R[u]$	Randbedingungen [Abkürzungen $y_a = y(a)$; $f_{1b} = f_1(b), \ldots$]	DIRICHLETsche Randteile M_0 und N_0
$-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y$ $R[u] = \dfrac{\int_a^b (f_1 u'^2 + f_0 u^2) dx + M_0[u]}{\int_a^b g_0 u^2 dx}$ $M_0[u] = [-f_1 u u']_a^b$	$y_a = y_b = 0$	$M_0 = 0$
	$y'_a = \alpha y_a$; $y'_b = -\beta y_b$	$M_0 = \alpha f_{1a} u_a^2 + \beta f_{1b} u_b^2$
	$y_a = y_b$; $f_{1a} y'_a = f_{1b} y'_b$	$M_0 = 0$
	$\begin{cases} y'_a = \alpha y_a + \gamma f_{1b} y_b \\ y'_b = -\gamma f_{1a} y_a - \beta y_b \end{cases}$	$M_0 = \alpha f_{1a} u_a^2 + \beta f_{1b} u_b^2 + 2\gamma f_{1a} f_{1b} u_a u_b$
$(f_2 y'')'' - (f_1 y')' + f_0 y = \lambda[-(g_1 y')' + g_0 y]$ $R[u] = \dfrac{\int_a^b (f_2 u''^2 + f_1 u'^2 + f_0 u^2) dx + M_0[u]}{\int_a^b (g_1 u'^2 + g_0 u^2) dx + N_0[u]}$ $M_0 = M_{0a} + M_{0b}$ $N_0 = N_{0a} + N_{0b}$ $M_0[u] = [u(f_2 u'')' - f_2 u' u'' - f_1 u u']_a^b$ $N_0[u] = [-g_1 u u']_a^b$	bei $x = a$: $y_a = y'_a = 0$	$M_{0a} = N_{0a} = 0$
	bei $x = a$: $y_a = 0$; $y''_a = \alpha y'_a$	$M_{0a} = \alpha f_{2a} u_a'^2$; $N_{0a} = 0$
	bei $x = a$: $y'_a = \alpha y_a$; $(f_2 y'')'_a = \beta y_a + \alpha (f_2 y'')_a$	$M_{0a} = (\alpha f_{1a} - \beta) u_a^2$; $N_{0a} = \alpha g_{1a} u_a^2$
	bei $x = b$: $y_b = y'_b = 0$	$M_{0b} = N_{0b} = 0$
	bei $x = b$: $y_b = 0$; $y''_b = -\alpha y'_b$	$M_{0b} = \alpha f_{2b} u_b'^2$; $N_{0b} = 0$
	bei $x = b$: $y'_b = -\alpha y_b$; $(f_2 y'')'_b = -\beta y_b - \alpha (f_2 y'')_b$	$M_{0b} = (\alpha f_{1b} - \beta) u_b^2$; $N_{0b} = \alpha g_{1b} u_b$
	$\begin{cases} y_a = y_b;\ (f_1 y')_a = (f_1 y')_b \\ \left(\frac{f_2}{f_1} y''\right)_a = \left(\frac{f_2}{f_1} y''\right)_b;\ (f_2 y'')'_a = (f_2 y'')'_b \end{cases}$	$M_0 = N_0 = 0$
Außerdem im Falle $g_1 \equiv 0$:	$\begin{cases} (f_2 y'')_a = \alpha y_a + \beta y'_a \\ (f_2 y'')'_a = \gamma y_a + (f_{1a} - \alpha) y'_a \end{cases}$	$M_{0a} = -\gamma u_a^2 + 2\alpha u_a u'_a + \beta u_a'^2$ $N_{0a} = 0$
	$\begin{cases} (f_2 y'')_b = \alpha y_b - \beta y'_b \\ (f_2 y'')'_b = \gamma y_b + (f_{1b} - \alpha) y'_b \end{cases}$	$M_{0b} = \gamma u_b^2 - 2\alpha u_b u'_b + \beta u_b'^2$ $N_{0b} = 0$

erhält man durch einmalige Teilintegration als Ergebnis der DIRICHLETschen Formel

$$(4\cdot19)\qquad \int_0^l u(-u'')\,dx = [u\cdot(-u')]_0^l - \int_0^l -u'\cdot u'\,dx$$
$$= \int_0^l u'^2 dx - Bu^2(l) + Au^2(0).$$

Hierbei ist $M_0[u] = -Bu^2(l) + Au^2(0)$ der DIRICHLETsche Randteil. Er würde bei den einfacheren Randbedingungen (y oder y' an den Randstellen $= 0$) verschwinden, hier aber tritt er auf (und ist z. B. bei Anwendung des RITZschen Verfahrens von § 15 wohl zu beachten).

4·7 Die Eingliedklasse. Die Realität der Eigenwerte war nach dem Satz in 4·5 gesichert, wenn außer der Selbstadjungiertheit des Problems noch die Voraussetzung erfüllt ist, daß $\int_a^b uN[u]dx$ für alle Vergleichsfunktionen u ein festes Vorzeichen hat. Diese Voraussetzung ist nicht nur bei den speziellen Eigenwertproblemen, sondern auch bei einer umfassenderen Klasse, der „Eingliedklasse" erfüllt. Diese Klasse stellt einen wichtigen, uns immer wieder begegnenden Sonderfall der Klasse der allgemeinen Eigenwertprobleme dar.

Definition der Eingliedklasse. *Ein Eigenwertproblem der Form* (4·5) *bis* (4·8) *gehört zur Eingliedklasse, wenn* 1. *der Differentialausdruck* $N[y]$, *der als Faktor beim Eigenwert* λ *steht, nur aus einem Gliede besteht:*

$$(4\cdot20)\qquad N[y] = (-1)^n [g_n(x)\,y^{(n)}]^{(n)}$$

und wenn 2. *die Randbedingungen* (4·8) *so beschaffen sind, daß für zwei beliebige Vergleichsfunktionen* u, v *gilt:*

$$(4\cdot21)\qquad \int_a^b uN[v]dx = \int_a^b g_n(x)\,u^{(n)}v^{(n)}dx\,.$$

Erläuterung: Bei der Eingliedklasse hat also die Differentialgleichung die Form:

$$(4\cdot22)\qquad M[y] = \lambda(-1)^n [g_n(x)\,y^{(n)}]^{(n)}\,.$$

Die Bedingung (4·21) läßt sich in jedem Einzelfalle durch Teilintegration (DIRICHLETsche Umformung nach 4·3) stets leicht nachprüfen; z. B. ist (4·21) sicher erfüllt, wenn die Randbedingungen so beschaffen sind, daß am Rande die Produkte $y^{(i)}\,[g_n y^{(n)}]^{(n-1-i)} = 0$ sind für $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Die Eingliedklasse enthält ohne weiteres die speziellen Eigenwertprobleme, also die Probleme $M[y] = \lambda g_0 y$ mit beliebigen Randbedingungen,

weiter die Probleme $M[y] = -\lambda(g_1(x)y')'$, wenn die Randbedingungen so beschaffen sind, daß yy' am Rande verschwindet. In der Tafel I gehören die Probleme der dritten Gruppe zur Eingliedklasse.

Nach der DIRICHLETschen Formel (4·18) verschwindet bei den Problemen der Eingliedklasse der DIRICHLETsche Randteil bezüglich des Differentialausdruckes $N[u]$, und es gilt unmittelbar nach (4·21)

$$\int_a^b uN[u]\,dx = \int_a^b g_n (u^{(n)})^2 dx$$

für alle Vergleichsfunktionen u.

Satz: *Bei selbstadjungierten Problemen der Eingliedklasse, bei denen die Funktion $g_n(x)$ (siehe Gl. (4·22)) ein festes Vorzeichen hat und für keine Vergleichsfunktion $u^{(n)} \equiv 0$ ist*[1]*, sind alle vorhandenen Eigenwerte reell.*

4·8. Beispiel für ein selbstadjungiertes Problem mit nichtreellen Eigenwerten. Bei den Beispielen in 4·1, bei denen nichtreelle Eigenwerte auftreten, waren die Probleme nicht selbstadjungiert. Bei den Sätzen in 4·5 und 4·7 über die Realität der Eigenwerte war die Selbstadjungiertheit eine wesentliche Voraussetzung. Die Frage, ob nun allgemein selbstadjungierte Probleme nur reelle Eigenwerte haben können, ist jedoch zu verneinen. Wir beweisen das durch Konstruktion eines Gegenbeispiels; wir wählen als Differentialgleichung für selbstadjungierte Probleme, die nicht der Eingliedklasse angehören:

$$(f_2 y'')'' - (f_1 y')' + f_0 y = \lambda\{-(g_1 y')' + g_0 y\}. \tag{4·23}$$

Um die Selbstadjungiertheit auch bezüglich der Randbedingungen zu sichern, setzen wir an

$$y(-1) = y\,(-1) = y(1) = y'(1) = 0 .$$

Eine Funktion, die diese Randbedingungen erfüllt, ist z. B.

$$y = (x^2 - 1)^2 \cdot h(x),$$

wo $h(x)$ im ganzen abgeschlossenen Intervall $(-1, +1)$ viermal stetig differenzierbar ist. Nun muß $h(x)$ komplex sein, wenn der Eigenwert λ komplex sein soll. Wir wählen $h(x) = x^2 + i$, also

$$y(x) = x^6 + x^4(i-2) + x^2(1-2i) + i .$$

[1] Die Voraussetzung, daß für alle Vergleichsfunktionen $u^{(n)} \not\equiv 0$ ist, kann nicht entbehrt werden, wie das Beispiel II in 5·7 zeigt. Dort ist $u' \equiv 0$ für die Vergleichsfunktion $u = 1$, und jede Zahl λ (auch eine beliebige komplexe Zahl) ist Eigenwert.

Nun läßt sich leicht eine Differentialgleichung (4·23) angeben, der y genügt, indem wir die f_ν und g_ν als Polynome ansetzen. Die Durchrechnung ergibt, daß y die Gleichung mit dem nichtreellen Eigenwert $\lambda = i$

$$\frac{1}{6}\left[\left(\frac{-146}{7}x^4 + 21x^2 - 5\right)y''\right]'' + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1891}{7}x^2 - 1\right)y'\right]' + 167y$$
$$= \lambda\left\{\frac{1}{2}[(-9x^2 + 121)y']' + 189y\right\}$$

erfüllt[1]).

4·9. Definite Eigenwertprobleme. Definition: *Ein Eigenwertproblem heißt „definit", wenn alle Eigenwerte* λ *reell sind und einerlei Vorzeichen haben. Es heißt „positiv definit", wenn alle* $\lambda > 0$, *und „negativ definit", wenn alle* $\lambda < 0$ *sind. Das Problem heißt „semidefinit", wenn unter den Eigenwerten auch die Zahl Null vorkommt, aber sonst alle Eigenwerte einerlei Vorzeichen haben.*

Weiter führen wir noch den Begriff „volldefinit" ein:

Definition: *Ein Eigenwertproblem mit der Gleichung* (4·5) *heißt volldefinit, wenn für jede Vergleichsfunktion* u

(4·24) $$\int_a^b uM[u]\,dx > 0 \quad \textit{und} \quad \int_a^b uN[u]\,dx > 0 \quad \textit{ist.}$$

Dann gilt der

Satz: *Ein volldefinites Eigenwertproolem ist positiv definit.*

Ist nämlich λ_k ein Eigenwert eines volldefiniten Problems mit der Eigenfunktion y_k, so gilt

$$y_k M[y_k] = \lambda_k y_k N[y_k]$$

identisch in x, und daraus folgt durch Integration beider Seiten über das Intervall a, b:

$$\lambda_k = \frac{\int_a^b y_k M[y_k]\,dx}{\int_a^b y_k N[y_k]\,dx}.$$

---

[1]) Bei diesem Beispiel ist die im Satz von 4·7 getroffene Voraussetzung $g_n(x) \neq 0$ im Grundintervall $-1 \leq x \leq 1$ erfüllt. Verzichtet man auf diese Voraussetzung, so zeigt das folgende (mir von Herrn H. Wielandt mitgeteilte) Beispiel den gleichen Sachverhalt: Das selbstadjungierte Eigenwertproblem

$$y'' + \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x}\,y = \lambda\,\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}\,y; \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

hat den Eigenwert $\lambda = i$ mit der Eigenfunktion $y = i + \cos x$.

Unter den genannten Voraussetzungen kann nun der Quotient

$$(4\cdot25)\qquad R[u] = \frac{\int_a^b u\,M[u]\,dx}{\int_a^b u\,N[u]\,dx},$$

den man den „RAYLEIGHschen Quotienten“ nennt[1]), nur positive Werte annehmen, wenn u irgendeine Vergleichsfunktion ist. Da die Eigenfunktionen unter den Vergleichsfunktionen enthalten sind, sind also wegen $R[y_k] = \lambda_k$ auch alle Eigenwerte positiv.

Wendet man auf die Integrale im RAYLEIGHschen Quotienten (4·25) die DIRICHLETsche Formel an, so entsteht

$$(4\cdot26)\qquad R[u] = \frac{\int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\,[u^{(\nu)}]^2\,dx + M_0[u]}{\int_a^b \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\,[u^{(\nu)}]^2\,dx + N_0[u]}.$$

Aus dieser Darstellung kann man unmittelbar hinreichende Bedingungen für die Definitheit des Problems gewinnen, indem man z. B. voraussetzt, daß die in Zähler und Nenner auftretenden Größen einzeln positiv sind. Das führt[2]) zu folgender

Definition: Ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem (4·5) bis (4·8) nennen wir K-definit bzw. K-semidefinit, wenn alle Funktionen f_ν und $g_\nu \geq 0$ sind und die DIRICHLETschen Randteile $M_0[u]$ und $N_0[u]$, die in den am Rande genommenen Größen $u, u', u'', \ldots$ quadratische Formen sind (vgl. (4·17), (4·18)), positiv definite bzw. semidefinite quadratische Formen sind.

Dann gilt das

hinreichende Kriterium: *K-definite Eigenwertprobleme sind zugleich definite Eigenwertprobleme.*

Die K-Definitheit ist sehr bequem nachprüfbar.

Außer der DIRICHLETschen Formel stehen auch noch andere Umformungen zur Verfügung, mit denen man die Definitheit eines Problems nachprüfen kann. Z. B. ist die bei Schwingungen von Kreisbogenträgern auftretende Aufgabe (vgl. Tafel I):

$$-y^{VI} + 2y^{IV} - y'' = \lambda(-y'' + y)$$

mit den Randbedingungen

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = y(b) = y'(b) = y''(b) = 0,$$

---

[1]) RAYLEIGH: JOHN WILLIAM STRUTT BARON RAYLEIGH, englischer Physiker, 1842—1919.

[2]) E. KAMKE, Math. Z. 48 (1942) 71.

oder mit

$$y(a) = y'(a) = y'''(a) = y(b) = y'(b) = y'''(b) = 0$$

positiv definit. Denn bei Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt Teilintegration

$$\int_a^b u M[u]\,dx = \int_a^b u(-u^{\mathrm{VI}} + 2u^{\mathrm{IV}} - u'')\,dx = \int_a^b (u''' - u')^2\,dx \geqq 0 .$$

Das Gleichheitszeichen kann nur stehen, wenn $u''' - u' \equiv 0$ ist. u müßte also eine Lösung dieser Differentialgleichung sein, somit die Form haben:

$$u = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} ,$$

mit c_1, c_2, c_3 als Konstanten. Die Randbedingungen erzwingen dann $u \equiv 0$; mithin ist für jede Vergleichsfunktion

$$\int_a^b u M[u]\,dx > 0 .$$

Da auch

$$\int_a^b u N[u]\,dx > 0$$

gilt, folgt die positive Definitheit der Aufgabe.

Beispiel: Das selbstadjungierte spezielle Eigenwertproblem

$$-y'' = \lambda y ,$$
$$y'(0) = A\,y(0), \quad y'(l) = B\,y(l)$$

hat nach dem Satz aus 4·5 nur reelle Eigenwerte. In 4·6 war für dieses Beispiel bereits die DIRICHLETsche Formel aufgestellt worden. Nach (4·19) lautete der DIRICHLETsche Randteil

$$M_0[u] = -B\,u^2(l) + A\,u^2(0) .$$

Für $A > 0$, $B < 0$ ist $M_0[u] \geqq 0$. Dann ist also das Eigenwertproblem K-definit, und alle Eigenwerte sind sicher nichtnegativ. Die Durchrechnung der einfachen Aufgabe ergibt mit $\lambda = k^2$, wenn man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (Integrationskonstanten c_1, c_2)

$$y = c_1 \sin k\,x + c_2 \cos k\,x$$

den Randbedingungen anpaßt, für k die transzendente Gleichung

$$(4{\cdot}27) \quad \operatorname{tg} k\,l = \frac{k(A - B)}{AB + k^2} .$$

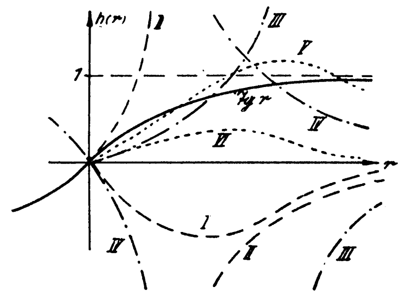


Abb. 4·3. Graphische Darstellung zur Lösung der Gleichung (4·28).

Sie liefert bei beliebigem A und B stets unendlich viele positive Eigenwerte λ. Wann können negative λ auftreten? Dann hat k die Gestalt $k = ir$, und wegen $\operatorname{tg} ilr = i \,\mathfrak{Tg}\, lr$ lautet die Gleichung für r

$$\mathfrak{Tg}\, lr = \frac{r(A-B)}{AB - r^2}. \tag{4·28}$$

Wir setzen $l = 1$ und fragen nach den Schnittpunkten der Kurven für $\mathfrak{Tg}\, r$ und $h(r) = \frac{r(A-B)}{AB-r^2}$. Für $A > 0$ und $B < 0$ hat $h(r)$ die Gestalt I (Abb. 4·3), dann existiert also kein Schnittpunkt $r \neq 0$ und also kein negativer Eigenwert. Ferner sind noch die Typen II (kein $\lambda < 0$), III, IV (je ein $\lambda < 0$), V (zwei $\lambda < 0$) möglich. Typ VI tritt bei reellem A und B nicht auf. In einer A-B-Ebene sind die verschiedenen Bereiche mit keinem, einem und zwei negativen Eigenwerten gekennzeichnet. Insbesondere sieht man, daß der Bereich der K-Definitheit (Quadrant $A > 0$, $B < 0$ (Abb. 4·4)) den Bereich der positiven Eigenwerte nicht ausfüllt, daß also das oben angegebene hinreichende Kriterium für die Definitheit nicht zugleich notwendig ist.

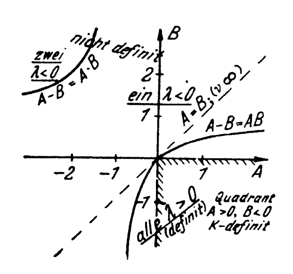


Abb. 4·4. Zu dem Beispiel in 4·9. A-B-Bereiche mit keinem, einem und zwei negativen Eigenwerten.

§ 5. Die Greensche Funktion bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Für das Folgende werden einige Tatsachen über die Greensche Funktion gebraucht. Diese sollen hier kurz hergeleitet werden, und zwar zunächst unabhängig von den Eigenwertproblemen[1]).

5·1. Definition der Greenschen Funktion. Es sei

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu(x) \cdot y^{(\nu)}(x) \tag{5·1}$$

irgendein linearer Differentialausdruck, seine Ordnung k kann gerade oder auch ungerade sein. Die Funktionen $p_\nu(x)$ seien stetig und $p_k(x)$ für alle x von Null verschieden. Dann sei das inhomogene *Randwertproblem* vorgelegt, bei gegebener stetiger Funktion $r(x)$ die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L[y] = r(x) \tag{5·2}$$

---

[1]) Literatur zu § 5: E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, London 1927, S. 205ff. E. Kamke, Math. Z. 46 (1940) 234ff., 244ff. E. Kamke. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 3 Aufl., New York S. 188ff. Chelsea Publishing Company.

zu finden, welche die Randbedingungen wie in (4·8)

(5·3) $$U_\mu[y] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k)$$

erfüllt. Wir versuchen, eine Funktion $G(x, \xi)$, die sogenannte „GREENsche Funktion", aufzustellen[1]), welche das Randwertproblem in der Form

(5·4) $$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi$$

bei beliebiger vorgegebener Funktion $r(x)$ löst.

Die GREEN*sche Funktion* $G(x, \xi)$ *wird durch folgende Bedingungen definiert:*

1. *G erfüllt für festes* ξ *aus dem Intervall* $a < \xi < b$ *als Funktion von x die homogene Differentialgleichung* $L[G] = 0$ *für alle* $x \neq \xi$. *Die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} \quad (mit\ k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

sind in jedem der Bereiche $a \leq x \leq \xi \leq b$ *und* $a \leq \xi \leq x \leq b$ *stetige Funktionen von x und* ξ.

2. *G erfüllt als Funktion von x die Randbedingungen* $U_\mu[G] = 0$.
3. *G ist für* $x = \xi$ *mit* $a < \xi < b$ *stetig mit seinen Ableitungen nach x bis zur* $(k-2)$*-ten Ordnung, während die der* $(k-1)$*-ten Ordnung einen Sprung von der Größe* $\frac{1}{p_k(\xi)}$ *macht.*

Wird zur Abkürzung

(5·5) $$G^{(\nu)}(x, \xi) = \frac{\partial^\nu G(x, \xi)}{\partial x^\nu}$$

gesetzt, dann soll also gelten:

$$G(x, \xi),\ G'(x, \xi), \ldots, G^{(k-2)}(x, \xi) \text{ stetig bei } x = \xi$$

und $$\lim_{\varepsilon \to 0} [G^{(k-1)}(\xi + \varepsilon, \xi) - G^{(k-1)}(\xi - \varepsilon, \xi)] = \frac{1}{p_k(\xi)},$$

oder kürzer geschrieben

(5·6) $$G^{(k-1)}(\xi + 0, \xi) - G^{(k-1)}(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_k}.$$

Ob und wann es eine GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ gibt, die alle hier geforderten Bedingungen erfüllt, wird in 5·3 untersucht werden.

---

[1]) GEORGE GREEN, englischer theoretischer Physiker, 1793—1841. Die GREENsche Funktion wird manchmal auch „Einflußfunktion" genannt.

Beispiel aus der Physik: Bei manchen physikalischen Aufgaben ist fast unmittelbar ersichtlich, wie man die GREENsche Funktion erhält. Wir betrachten als Beispiel einen Träger der Länge l auf zwei Stützen, der im Abstande ξ vom linken Auflager eine Last der Größe 1 trägt (Abb. 5·1).

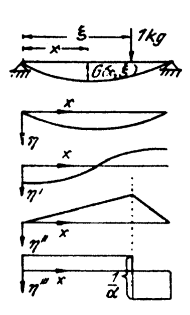


Abb. 5·1. Die Einflußzahl (Durchbiegung an der Stelle x unter dem Einfluß einer Last 1 an der Stelle ξ) als GREENsche Funktion.

Dann ist die GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ gleich der Durchbiegung $\eta(x)$: Es ist $G(x, \xi) = \eta(x)$ unter der Last 1 an der Stelle $\xi =$ „Einflußzahl" $\varepsilon(x, \xi)$. Die Querkraft $Q = -(\alpha\eta'')'$ macht an der Laststelle $x = \xi$ einen Sprung der Größe 1, oder bei konstantem α macht η''' einen Sprung der Größe $\frac{1}{\alpha}$, während η, η', η'' bei $x = \xi$ stetig sind. Die Differentialgleichung für die Durchbiegung $y(x)$ lautet bei der Belastungsdichte $p(x)$:

$$(\alpha\eta'')'' = p(x).$$

Die Randbedingungen sind: η und $\eta'' = 0$ für $x = 0$, $x = l$.

$\eta = G(x, \xi)$ erfüllt die Differentialgleichung, nämlich die homogene Differentialgleichung $(\alpha\eta'')'' = 0$, außer an der Laststelle $x = \xi$, und erfüllt die Randbedingungen.

Wirkt an Stelle der Last 1 die Belastung $p(\xi)\Delta\xi$, so ist die Durchsenkung $G(x, \xi)p(\xi)\Delta\xi$, und ist über den ganzen Träger eine Belastung mit der Dichte $p(\xi)$ verteilt, so ist die gesamte Durchsenkung

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)p(\xi)d\xi,$$

d. h. es wird hier unmittelbar plausibel, daß die GREENsche Funktion das inhomogene Randwertproblem löst.

5·2. Beweis der Lösungsformel für das Randwertproblem. Wir nehmen zunächst an, daß es zu unserem Randwertproblem (5·2), (5·3) eine GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ gibt, welche die in 5·1 geforderten Bedingungen erfüllt, und zeigen, daß dann die durch das Integral

$$F(x) = \int_a^b G(x, \xi)r(\xi)d\xi$$

festgelegte Funktion $F(x)$ die Lösung $y(x)$ des Randwertproblems ist. Durch Differenzieren folgt mit Benutzung der Abkürzung (5·5)

$$F'(x) = \int_a^b G'(x, \xi) r(\xi) d\xi,$$

$$F''(x) = \int_a^b G''(x, \xi) r(\xi) d\xi,$$

$$F^{(k-1)}(x) = \int_a^b G^{(k-1)}(x, \xi) r(\xi) d\xi = \int_a^x \cdots + \int_{x'}^b \cdots.$$

Bei nochmaliger Differentiation muß man berücksichtigen, daß $G^{(k-1)}(x, \xi)$ an der Stelle $x = \xi$ einen Sprung macht, und dementsprechend das Integrationsintervall von a bis b durch die Stelle x in zwei Intervalle aufteilen.

$$F^{(k)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k} r(\xi) d\xi + \left[\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \cdot r(\xi)\right]_{\xi = x - 0}$$
$$+ \int_x^b \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k} r(\xi) d\xi - \left[\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \cdot r(\xi)\right]_{\xi = x + 0}$$

Dabei ist $[G^{(k-1)}(x, \xi)]_{\xi = x - 0}$ der Grenzwert, wobei ξ kleiner ist als x und von links gegen x rückt. Man kann für diesen Grenzwert auch schreiben: $[G^{(k-1)}(x, \xi)]_{x = \xi + 0}$, da die $(k - 1)$-te Ableitung von G nach x im Bereiche $a \leq \xi \leq x \leq b$ als stetige Funktion von x und ξ vorausgesetzt wurde (diese Ableitung ist für $x = \xi$ als einseitige zu nehmen). Jetzt kann man die Sprungrelation (5·6) benutzen, und es folgt

$$F^{(k)}(x) = \int_a^b G^{(k)}(x, \xi) r(\xi) d\xi + \frac{r(x)}{p_k(x)}.$$

Beim Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$L[F] = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu F^{(\nu)} = \int_a^b \left\{\sum_{\nu=0}^{k} p_\nu(x) \frac{\partial^\nu G(x, \xi)}{\partial x^\nu}\right\} r(\xi) d\xi + \frac{r(x)}{p_k(x)} \cdot p_k(x).$$

Das Integral auf der rechten Seite verschwindet wegen $L[G] = 0$[1]), denn G erfüllt die homogene Differentialgleichung, also $L[F] = r(x)$. Ferner erfüllt mit $G(x, \xi)$ auch $F(x)$ alle Randbedingungen, ist mithin tatsächlich Lösung des vorgelegten Randwertproblems. Damit ist aber noch nichts darüber ausgesagt, ob $F(x)$ die einzige Lösung des Randwertproblems ist.

Wenn es mehrere, also mindestens zwei voneinander verschiedene Lösungen, etwa $F_1(x)$ und $F_2(x)$, gibt, so ist ihre Differenz $z(x) = F_1(x) - F_2(x)$ eine nicht identisch verschwindende Lösung des zu (5·2), (5·3) gehörigen homogenen Randwertproblems

$$L[z] = 0, \quad U_\mu[z] = 0.$$

---

[1]) G genügt der Differentialgleichung $L[G] = 0$ mit Ausnahme der einen Stelle $x = \xi$, aber bei der Integration über ξ stört diese isolierte Stelle $x = \xi$ nicht.

Wenn wir zeigen können, daß dieses homogene Randwertproblem nur die Lösung $z \equiv 0$ besitzt, ist damit zugleich bewiesen, daß das inhomogene Problem (5·2), (5·3) höchstens eine Lösung haben kann. Diese Frage wird in der nächsten Nummer behandelt.

5·3. Konstruktion der Greenschen Funktion aus einem Fundamentalsystem. In dieser Nummer soll die bisher noch offengebliebene Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der GREENschen Funktion untersucht werden, und zwar mit einer Methode, die zugleich als Verfahren zur Aufstellung der GREENschen Funktion dienen kann

Die homogene Differentialgleichung

$$L[y] = 0 \tag{5·7}$$

hat ein Fundamentalsystem von k voneinander linear unabhängigen Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_k$. (Die Lösungen werden z_i und nicht y_i genannt, weil y_i später die Eigenfunktionen bedeuten.) Es ist also

$$L[z_i] = 0 .$$

Dann lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5·7)

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i$$

mit c_i als willkürlichen Konstanten.

Da die GREENsche Funktion ebenfalls der homogenen Differentialgleichung genügen soll, muß sie sich in jedem der beiden Felder $x \leq \xi$ und $x \geq \xi$ aus den z_i aufbauen lassen, aber mit verschiedenen Konstanten c_i, c_i^* in den beiden Feldern, vgl. Abb. 5·2.

$$\left\{\begin{aligned} G(x, \xi) &= \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(x) = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) z_i(x) \quad \text{für} \quad x \leq \xi; \\ G(x, \xi) &= \sum_{i=1}^{k} c_i^* z_i(x) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i) z_i(x) \quad \text{für} \quad x \geq \xi . \end{aligned}\right. \tag{5·8}$$

Dabei ist $c_i = a_i + b_i$ und $c_i^* = a_i - b_i$ gesetzt, und die a_i, b_i sind noch unbekannte Funktionen von ξ. Zunächst kann man die b_i aus den Übergangsbedingungen an der Stelle $x = \xi$ bestimmen:

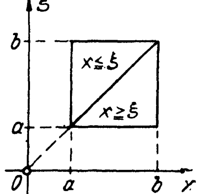


Abb. 5·2. Die beiden Felder $x \geq \xi$, $x \leq \xi$ bei der GREENschen Funktion.

Die Bedingung der Stetigkeit von $G(x, \xi)$ $G'(x, \xi), \ldots, G^{(k-2)}(x, \xi)$ ergibt

$$\sum_{i=1}^{k} b_i z_i^{(\nu)}(\xi) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k-2). \tag{5·9}$$

Schließlich verlangt die Sprungbedingung (5·6) für $G^{(k-1)}(x, \xi)$:

$$\sum_{i=1}^{k} b_i z_i^{(k-1)}(\xi) = -\frac{1}{2 p_k(\xi)} \tag{5·10}$$

So hat man für die k Unbekannten $b_i(\xi)$ ebensoviele lineare Gleichungen erhalten, aus denen man die b_i stets berechnen kann, denn die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems

$$(5{\cdot}11)\qquad \begin{vmatrix} z_1(\xi) & z_2(\xi)\cdots\cdots & z_k(\xi) \\ z_1'(\xi) & z_2'(\xi)\cdots\cdots & z_k'(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(k-1)}(\xi) & z_2^{(k-1)}(\xi)\cdots & z_k^{(k-1)}(\xi) \end{vmatrix}$$

ist $\neq 0$; sie ist die „WRONSKIsche Determinante" für die Funktionen z_i und verschwindet nicht, weil die z_i als linear unabhängig vorausgesetzt sind[1]).

Nachdem die b_i so bestimmt sind, werden die a_i aus den Randbedingungen berechnet. Diese lauten

$$U_\mu[G] = U_\mu\left[\sum_{i=1}^{k}(a_i \pm b_i) z_i\right] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Bei $\pm$ ist das obere Zeichen zu verwenden, wenn bei der Randbedingung der linke Rand $x = a$ benutzt wird, und entsprechend beim rechten Rand $x = b$ das untere Zeichen. Wegen der Linearität der U_μ erhält man somit für die k Unbekannten a_i die k Gleichungen

$$(5{\cdot}12)\qquad \sum_{i=1}^{k} a_i U_\mu[z_i] = \mp \sum_{i=1}^{k} b_i U_\mu[z_i] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist

$$(5{\cdot}13)\qquad |U_\mu[z_i]| = \begin{vmatrix} U_1[z_1], & U_1[z_2], & \ldots, & U_1[z_k] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_k[z_1], & U_k[z_2], & \ldots, & U_k[z_k] \end{vmatrix}.$$

Wenn $|U_\mu[z_i]| \neq 0$ ist, lassen sich die a_i berechnen, es existiert dann die GREENsche Funktion, und zwar ist sie eindeutig festgelegt.

Wenn $|U_\mu[z_i]| = 0$ ist, lassen sich die a_i aus (5·12) nicht oder nicht eindeutig berechnen; es wird sich in 5·7 bei Betrachtung der Eigenwertprobleme zeigen, daß dann $|U_\mu[z_i]| = 0$ gerade die Bedingung für die Eigenwerte darstellt.

Nach (5·8) läßt sich somit die GREENsche Funktion im Falle $|U_\mu[z_i]| \neq 0$ in der Gestalt schreiben:

$$(5{\cdot}14)\qquad \begin{cases} G(x,\xi) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i z_i(x)}_{\substack{G_1(x,\xi)\\ \text{stetig}}} \pm \underbrace{\sum_{i=1}^{k} b_i z_i(x)}_{\substack{G_2(x,\xi)\\ \text{unstetig in der } (k-1)\text{-ten Ableitung.}}} \left\{ \begin{array}{l} + \text{ für } x \leq \xi, \\ - \text{ für } x \geq \xi. \end{array}\right. \end{cases}$$

[1]) Siehe z. B. J. HORN, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Aufl. Berlin u. Leipzig 1927, S. 57.

Die GREENsche Funktion setzt sich also aus zwei Teilen zusammen; der eine Teil $G_1(x, \xi)$ ist k-mal stetig nach x differenzierbar, der andere Teil $G_2(x, \xi)$ springt in der $(k-1)$-ten Ableitung.

Der Bestandteil G_2 läßt sich stets angeben, da die Determinante des Gleichungssystems für die b_i nicht verschwindet, der Bestandteil G_1 dagegen nur, wenn die Determinante $|U_\mu[z_i]| \neq 0$ ist; nach der CRAMERschen Regel tritt bei Berechnung der a_i diese Determinante im Nenner auf, und man kann schreiben

$$G_1(x, \xi) = \frac{H(x, \xi)}{\text{det.}\ |U_\mu[z_i]|},$$

wobei der Zähler $H(x, \xi)$ wieder stets existiert, und zwar ist $H(x, \xi)$ als lineare Kombination aus den $z_i(x)$ bei festem ξ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung: $L[H] = 0$. G_2 ist von den Randbedingungen unabhängig, dafür hängt G_1 von den Randbedingungen ab.

Die Determinante (5·13) tritt auch bei der Frage auf, ob das zu (5·2), (5·3) gehörige homogene Randwertproblem

$$L[y] = 0, \quad U_\mu[y] = 0$$

nichttriviale (nicht identisch verschwindende) Lösungen y besitzt. Eine solche Lösung y muß sich in der Gestalt (mit C_i als Konstanten)

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i(x)$$

darstellen lassen, und die C_i genügen dann dem Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_\mu[z_i] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist wieder die Determinante (5·13). Dann und nur dann, wenn $|U_\mu[z_i]| = 0$ ist, gibt es Zahlen C_i, die nicht sämtlich verschwinden, und hat das homogene Randwertproblem nichttriviale Lösungen. Wenn $|U_\mu[z_i]| \neq 0$ ist, hat also das homogene Randwertproblem nur die Lösung $y \equiv 0$, und die Lösung des inhomogenen Randwertproblems ist eindeutig festgelegt.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in dem

Satz: *Es sei $z_1(x), \ldots, z_k(x)$ ein Fundamentalsystem (k linear voneinander unabhängige Lösungen) der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung k-ter Ordnung $L[y] = 0$. Werden k (voneinander linear unabhängige) lineare homogene Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ (für $\mu = 1, 2, \ldots, k$) an den Stellen $x = a$ und $x = b$ vorgeschrieben, so gibt es in dem Falle, daß die Determinante $|U_\mu[z_i]| \neq 0$ ist, eine durch die drei in 5·1 genannten Forderungen eindeutig festgelegte Greensche Funktion $G(x, \xi)$. Sie löst das Randwertproblem $L[y] = r(x)$, $U_\mu[y] = 0$ bei beliebiger rechter Seite $r(x)$ durch*

die Lösungsformel (5·4), *und diese Lösung ist die einzige, die das Randwertproblem besitzt. Genau dann, wenn die Determinante* $|U_\mu[z_i]| = 0$ *ist, hat das homogene Randwertproblem* $L[y] = 0$, $U_\mu[y] = 0$ *nicht identisch verschwindende Lösungen.*

Ein ausführlich durchgerechnetes Beispiel zur Konstruktion der GREENschen Funktion nach dem hier beschriebenen Verfahren findet sich in 7·8 bei der Übungsaufgabe 2 (S. 121).

Zusatz. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^{\varrho+\sigma} G(x,\xi)}{\partial x^\varrho \, \partial \xi^\sigma}$ sind für $0 \leq \varrho + \sigma \leq k - 2$ stetige Funktionen von x und ξ.

Bildet man nämlich diese Ableitungen nach (5·8), so hat man zu zeigen, daß an der Stelle $x = \xi$ die von $\sum_{i=1}^{k} b_i(\xi)\, z_i(x)$ herrührenden Bestandteile verschwinden. Nun folgt durch Differentiation der ersten Gl. (5·9), die eine Identität in ξ darstellt[1]):

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{d b_i}{d\xi} z_i + b_i(\xi) z_i'(\xi) = 0,$$

also wegen der zweiten Gleichung von (5·9)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{d b_i}{d\xi} z_i(\xi) = 0, \tag{5·15}$$

d. h. $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi}$ ist stetig; genau so folgt durch Differenzieren der zweiten Gleichung von (5·9)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{d b_i}{d\xi} z_i'(\xi) = 0, \tag{5·16}$$

d. h. $\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x\, \partial \xi}$ ist stetig und ebenso $\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^2\, \partial \xi}, \ldots, \frac{\partial^{k-2} G(x,\xi)}{\partial x^{k-3}\, \partial \xi}$.

Weiter folgt durch Differentiation von (5·15) bei Berücksichtigung von (5·16)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{d^2 b_i}{d\xi^2} z_i(\xi) = 0,$$

d. h. $\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial \xi^2}$ ist stetig, und bei Differentiation von (5·15) ergibt sich die Stetigkeit von $\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x\, \partial \xi^2}$ usw.

---

[1]) Bei dem folgenden Beweis wird die Tatsache gebraucht, daß die Funktionen $b_i(\xi)$ stetige Ableitungen bis zur $(k-2)$-ten Ordnung besitzen. Das ist gesichert, wenn wir die Funktionen $p_\nu(x)$ nicht nur wie in 5·1 als stetig, sondern sogar als $(k-2)$mal stetig differenzierbar voraussetzen. Man kann jedoch diese Zusatzvoraussetzung auch vermeiden, vgl. E. KAMKE, Math. Z. 46 (1940) 272.

5·4. Symmetrie der Greenschen Funktion $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ für selbstadjungierte Randwertprobleme. Die Randwertaufgabe (5·2), (5·3) sei nun selbstadjungiert[1]), das besagt, daß 1. die Differentialgleichung jetzt von gerader Ordnung $k = 2m$ ist und die Gestalt

$$L[y] = M[y] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} [f_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x)]^{(\nu)} = r(x)$$

hat und daß 2. die Randbedingungen $U_{\mu}[y] = 0$ so beschaffen sind, daß

$$\int_a^b (u M[v] - v M[u]) dx = 0$$

für beliebige Vergleichsfunktionen u, v gilt. Mit Hilfe der DIRICHLETschen Umformung in 4·3 wird das Integral umgeformt in einen Randausdruck von der Ordnung $2m - 1$:

$$(5{\cdot}17) \qquad \int_a^b (u M[v] - v M[u]) dx = [S(u, v)]_a^b .$$

Dabei ist

$$S(u, v) = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+\varrho} \{u^{(\varrho)} [f_{\nu}(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)} - v^{(\varrho)} [f_{\nu} u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\varrho)}\}$$

ein Bilinearausdruck in u, v und ihren Ableitungen bis zur $(2m - 1)$-ten Ordnung, und zwar treten nach (4·11) die $(2m - 1)$-ten Ableitungen $u^{(2m-1)}$, $v^{(2m-1)}$ nur an einer Stelle in der Summe (für $\varrho = 0$, $\nu = m$) auf, so daß man schreiben kann

$$S(u, v) = (-1)^m \{f_m (u v^{(2m-1)} - v u^{(2m-1)})\} + \text{niedrigere Ableitungen.}$$

Wir setzen nun voraus, es existiere zu dem vorgelegten Randwertproblem eine GREENsche Funktion, und bilden die GREENschen Funktionen für zwei beliebige, aber weiterhin festgehaltene Stellen $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ mit $a < \xi_1$, $\xi_2 < b$ und bezeichnen sie zur Unterscheidung mit $G_{(1)}$ und $G_{(2)}$:

$$G_{(1)} = G_{(1)}(x) = G(x, \xi_1), \qquad G_{(2)} = G(x, \xi_2).$$

Dann ist

$$\int_a^b (G_{(1)} M[G_{(2)}] - G_{(2)} M[G_{(1)}]) dx = 0$$

wegen

$$M[G_{(1)}] = M[G_{(2)}] = 0 ,$$

also weil G, abgesehen von der einen Stelle $x = \xi_1$, bzw. $x = \xi_2$, die Differentialgleichung erfüllt [nicht etwa wegen der Selbstadjungiertheit, denn $G_{(1)}$ und $G_{(2)}$ sind infolge der Unstetigkeit in der $(2m - 1)$-ten Ableitung

[1]) Bisher war der Begriff „selbstadjungiert" nur bei Eigenwertaufgaben eingeführt worden.

keine Vergleichsfunktionen]. Andererseits können wir das Integral dadurch auswerten, daß wir an Stelle des Integrationsintervalls a, b die drei Teilintervalle a bis $\xi_1 - \varepsilon$; $\xi_1 + \varepsilon$ bis $\xi_2 - \varepsilon$; $\xi_2 + \varepsilon$ bis b verwenden, für das Integral über jedes dieser Teilintervalle die Umformung (5·17) benutzen und ε gegen 0 gehen lassen. So ergibt sich:

$$0 = \int_a^b = \int_a^{\xi_1 - 0} + \int_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} + \int_{\xi_2+0}^{b} = [S(G_{(1)}G_{(2)})]_a^{\xi_1-0} + [S(G_{(1)}G_{(2)})]_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} + [S(G_{(1)}G_{(2)})]_{\xi_2+0}^{b}$$
$$= [S(G_{(1)}G_{(2)})]_a^b - [S(G_{(1)}G_{(2)})]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0} - [S(G_{(1)}G_{(2)})]_{\xi_2-0}^{\xi_2+0}.$$

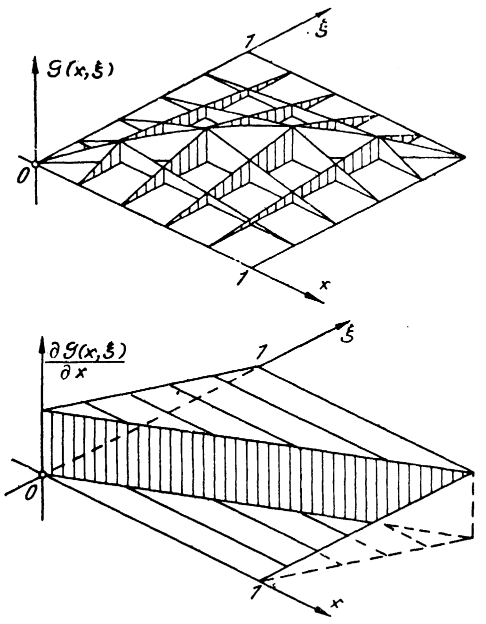


Abb. 5·3. GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ und ihre erste partielle Ableitung nach x für den Differentialausdruck $-y''$ bei verschwindenden Randwerten.

Nun ist $[S(G_{(1)}G_{(2)})]_a^b = 0$ wegen der vorausgesetzten Selbstadjungiertheit des Problems.

Ebenso verschwinden bei $[S(G_{(1)}G_{(2)})]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}$ alle Ausdrücke, die Ableitungen von niedrigerer als der $(2m-1)$-ten Ordnung enthalten, da diese stetig sind; nur bei der $(2m-1)$-ten Ableitung bleibt wegen der Sprungbeziehung (5·6)

$$G_{(1)}^{(k-1)}(\xi_1 + 0) - G_{(1)}^{(k-1)}(\xi_1 - 0) = \frac{1}{p_k(\xi_1)} = \frac{(-1)^m}{f_m(\xi_1)}$$

der Ausdruck übrig:

$$-(-1)^m f_m(\xi_1)\, G_{(2)}(\xi_1)\,\frac{(-1)^m}{f_m(\xi_1)}\,.$$

Entsprechend bleibt bei $[S(G_{(1)}G_{(2)})]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}$ der Ausdruck übrig:

$$(-1)^m f_m(\xi_2)\, G_{(1)}(\xi_2)\,\frac{(-1)^m}{f_m(\xi_2)}\,.$$

Die beiden Ausdrücke haben die Summe 0, also gilt in der Tat

(5·18) $$G(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1)\,.$$

Das ist die behauptete Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion.

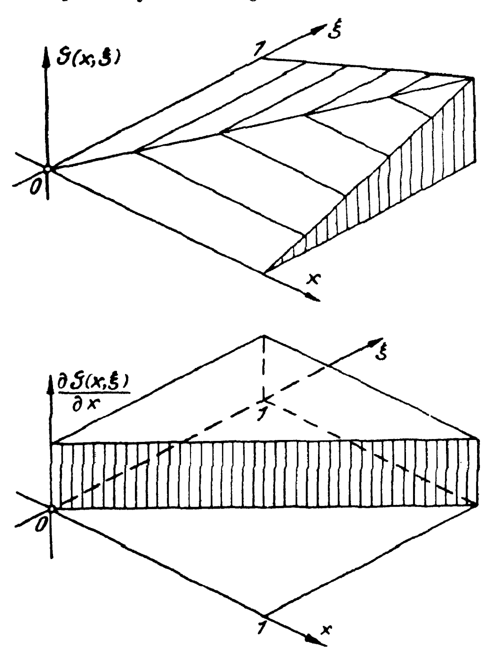


Abb. 5·4. GREENsche Funktion und ihre erste partielle Ableitung nach x für das zweite Beispiel in 5·5.

5·5. Einfache Beispiele von Greenschen Funktionen. 1. Zu dem Differentialausdruck $M[y] = -y''$ und den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ kann man nach dem in 5·3 angegebenen Verfahren leicht die GREENsche Funktion ermitteln:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{für } x \leq \xi \\ \xi(1-x) & \text{,, } x \geq \xi\,. \end{cases}$$

In Abb. 5·3 sind G und $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ als Funktionen von x und ξ in axonometrischer Darstellung aufgetragen.

Tafel IV. Einfache Beispiele Greenscher Funktionen.

Differentialausdruck $M[y] =$	Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ Abkürzungen: $y_0 = y(0)$; $y_l' = y'(l)$	Greensche Funktion $G(x, \xi)$ für $x \leq \xi$ [Für $x \geq \xi$ ist G durch $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ festgelegt]	
$-y''$	$y(0) = y(l) = 0$	$x\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$	
	$y(0) = y'(l) = 0$	x	
	$\alpha y_0 + \beta y_0' = \gamma y_l + \delta y_l' = 0$	$\frac{(\alpha x - \beta)(\gamma(\xi - l) - \delta)}{-l\alpha\gamma - \alpha\delta + \beta\gamma}$	E. Kamke, Differentialgleichungen, Leipzig 1942, S. 396
	$\alpha y_0 + \beta y_l = \gamma y_0' + \delta y_l' = 0$ mit $\alpha\gamma = \beta\delta$	$\frac{-\beta(\gamma + \delta)\xi + \delta(\alpha + \beta)x + l\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)}$	
$-(f_1(x)y')'$	$y(0) = y(l) = 0$	$q(x)\left(1 - \frac{q(\xi)}{q(l)}\right)$	$q(x) = \int_0^x \frac{dt}{f_1(t)}$
	$y(0) = y'(l) = 0$	$q(x)$	
	$y_0 = y_l + c y_l' = 0$	$q(x)\left[1 - \frac{q(\xi)}{q(l) + \frac{c}{f_1(l)}}\right]$	
$-y'' - n^2 y$	$y(0) = y(1) = 0$	$\frac{\sin nx \sin n(1 - \xi)}{n \sin n}$	E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, London 1927, S. 258
	$y(0) - y(1) = y'(0) - y'(1) = 0$	$\frac{1}{2n}\left\{-\operatorname{ctg}\frac{n}{2}\cos n(x - \xi) + \sin n(x - \xi)\right\}$	
$-y'' + y$	$y(\pm\infty)$ endlich	$\frac{1}{2}e^{x-\xi}$	Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 1931, S. 321 bis 326
$-xy'' - y'$	$y(1) = 0$, $y(0)$ endlich	$-\log\xi$	
$-(xy')' + \frac{n^2}{x}y$	$y(1) = 0$, $y(0)$ endlich	$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^n - (x\xi)^n\right]$	
$-y'' + (1 + x^2)y$	$y(\pm\infty) = 0$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt \int_{\xi}^{\infty} e^{-t^2}dt$	

Tafel IV (Fortsetzung).

Differentialausdruck $M[y] =$	Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ Abkürzungen: $y_0 = y(0)$; $y'_l = y'(l)$	GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ für $x \leq \xi$ [Für $x \geq \xi$ ist G durch $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ festgelegt]	
y^{IV}	$y_0 = y'_0 = y''_l = y'''_l = 0$	$\frac{1}{6} x^2 (3\xi - x)$	
	$y_0 = y''_0 = y_l = y''_l = 0$	$\frac{1}{6l} x(\xi - l)(x^2 + \xi^2 - 2l\xi)$	
	$y_0 = y'_0 = y_l = y'_l = 0$	$\frac{1}{6l^3} x^2 (\xi - l)^2 (3l\xi - 2\xi x - lx)$	
	$y_0 = y'_0 = y_l = y''_l = 0$	$\frac{x^2(\xi - l)}{12 l^3} \{3l\xi^2 - 6l^2\xi + [-\xi^2 + 2l\xi + 2l^2]x\}$	
$y^{IV} - n^4 y$	$y_0 = y''_0 = y_l = y''_l = 0$	$\frac{1}{2n^3}\left[\frac{\sin n(l-\xi)}{\sin nl} \sin nx - \frac{\mathfrak{Sin}\, n(l-\xi)}{\mathfrak{Sin}\, nl} \mathfrak{Sin}\, nx\right]$	
$(f_2 y'')''$	$y_0 = y'_0 = y''_l = y'''_l = 0$	$\xi v(x) - z(x)$	$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{f_2(t)}$ $v(x) = \int_0^x u(t)\,dt$ $w(x) = \int_0^x \frac{t\,dt}{f_2(t)}$ $z(x) = \int_0^x w(t)\,dt$ $\Delta = u(l)\cdot z(l) - v(l)\cdot w(l)$ $D = lv(l) - z(l)$
	$y_0 = y''_0 = y_l = y''_l = 0$	$\left[\xi\left(v(l) - \frac{z(l)}{l}\right) - (lv(\xi) - z(\xi))\right]\frac{x}{l} + (\xi - l)\frac{z(x)}{l}$	
	$y_0 = y'_0 = y_l = y'_l = 0$	$\frac{1}{\Delta}\{[-z(\xi)w(l) + v(\xi)(lw(l) - z(l)) + \xi\Delta]\cdot v(x) + [z(\xi)u(l) - v(\xi)w(l) - \Delta]\cdot z(x)\}$	
	$y_0 = y'_0 = y_l = y''_l = 0$	$\frac{1}{D}\{[lz(\xi) - l^2 v(\xi) + \xi D]v(x) + [lv(\xi) - z(\xi) - D]z(x)\}$	

$$\left.\begin{array}{r} M[y] = r(x) \\ U_\mu = 0 \end{array}\right\} \text{ ist gleichbedeutend mit } y(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

2. $$M[y] = -y'', \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Jetzt lautet die GREENsche Funktion

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq \xi \\ \xi & \text{„} \quad x \geq \xi. \end{cases}$$

Abb. 5·4 zeigt wieder G und $\frac{\partial G}{\partial x}$ als Funktionen von x und ξ in axonometrischer Darstellung.

Man bestätigt: die GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ ist symmetrisch in bezug auf die Winkelhalbierende $x = \xi$.

Dagegen ist $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$ keine symmetrische Funktion mehr! Ferner sieht man hier, daß der Sprung von $\frac{\partial G}{\partial x}$ in der ξ-Richtung das umgekehrte Vorzeichen hat wie der Sprung in der x-Richtung:

$$G'(x, x+0) - G'(x, x-0) = 1$$
$$G'(x+0, x) - G'(x-0, x) = -1.$$

3. $$M[y] = \alpha y^{IV} \text{ mit konstantem } \alpha,$$
$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0.$$

Die GREENsche Funktion ist hier einfach die Durchbiegung (Abb. 5·1), das Beispiel ist das gleiche wie in 5·1.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\xi - l)}{6l\alpha}(x^2 + \xi^2 - 2l\xi) & \text{für } x \leq \xi \\ \frac{\xi(x-l)}{6l\alpha}(\xi^2 + x^2 - 2lx) & \text{für } x \geq \xi. \end{cases}$$

Hier ist

$$\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{x(\xi - l)}{l\alpha} & \text{für } x \leq \xi \\ \frac{\xi(x-l)}{l\alpha} & \text{für } x \geq \xi \end{cases}$$

bis auf einen konstanten Faktor die GREENsche Funktion für das Beispiel 1 bei $l = 1$.

4. $$M[y] = -y'' - \lambda y,$$
$$y(0) = 0; \quad y'(1) = \lambda y(1).$$

Wir setzen $\lambda = k^2$ und erhalten

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin kx}{k}\left[\frac{\sin k\xi\,(k\cos k + \sin k)}{\cos k - k\sin k} + \cos k\xi\right] & \text{für } x \leq \xi \\ \frac{\sin k\xi}{k}\left[\frac{\sin kx\,(k\cos k + \sin k)}{\cos k - k\sin k} + \cos kx\right] & \text{für } x \geq \xi. \end{cases}$$

Die GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ ist also auch aufstellbar, wenn in der Differentialgleichung und in den Randbedingungen ein Parameter λ auftritt. Das leitet uns bereits zu den Eigenwertproblemen über:

5·6. Die Greensche Resolvente für Nichteigenwerte. Wir betrachten nun das Eigenwertproblem

$$(5{\cdot}19) \qquad \begin{cases} L[y] \equiv M[y] - \lambda N[y] = 0, \\ U_\mu[y, \lambda] = 0, \end{cases}$$

wobei die Voraussetzungen von 4·2 erfüllt sein mögen, als ein Randwertproblem wie in den vorigen Nummern 5·1 bis 5·4; der einzige Unterschied besteht darin, daß hierbei noch ein Parameter λ auftritt. Die GREENsche Funktion wird jetzt auch noch von λ abhängen:

$$G(x, \xi) = G(x, \xi, \lambda).$$

Man nennt dann die GREENsche Funktion $G(x, \xi, \lambda)$ auch die „GREENsche Resolvente". Wir fassen hierbei λ als Parameter auf, der beliebige Werte annehmen kann mit Ausnahme der Eigenwerte. (Nach dem Satz in 5·3 existiert die GREENsche Funktion, wenn das homogene Randwertproblem nur die Lösung $y \equiv 0$ hat, wenn also λ kein Eigenwert ist.) Es ist dann also

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda) r(\xi) d\xi \tag{5·20}$$

die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} L[y] \equiv M[y] - \lambda N[y] = r(x); \\ U_\mu[y] = 0. \end{cases} \tag{5·21}$$

5·7. Bedingungsgleichung für die Eigenwerte. Bei dem Eigenwertproblem (5·19) hängen die Funktionen $z_i(x)$ des Fundamentalsystems (vgl. 5·3) der Differentialgleichung $M[y] - \lambda N[y] = 0$ auch von λ ab: $z_i(x) = z_i(x, \lambda)$. Aus ihnen müssen sich die Eigenfunktionen y linear zusammensetzen:

$$y = \sum_{i=1}^{2m} C_i z_i(x).$$

Die C_i sind dabei so zu bestimmen, daß die Randbedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{i=1}^{2m} C_i U_\mu[z_i] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2m). \tag{5·22}$$

Das sind $2m$ lineare homogene Gleichungen für die $2m$ Unbekannten C_i. Sie haben genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Das ist gerade die bereits in (5·13) aufgetretene Determinante

$$\Delta(\lambda) = \text{det.} \, |U_\mu[z_i]| = 0. \tag{5·23}$$

Diese Gleichung ist die Bedingung für das Vorhandensein von Zahlen $C_i \not\equiv 0$, also für das Vorhandensein von Eigenfunktionen. Gl. (5·23) ist also die Gleichung für die Eigenwerte λ.

Man kann nun einige allgemeine Aussagen über die Lage der Eigenwerte machen, wenn man Tatsachen aus der Funktionentheorie verwendet. In dieser und der folgenden Nummer ziehen wir deshalb Sätze aus der Funktionentheorie heran. Wir benutzen zunächst einen Satz über die Abhängigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung von Parametern.

Wenn die Koeffizienten in der Differentialgleichung und in den Anfangsbedingungen differenzierbar von einem Parameter λ abhängen, also im Sinne der Funktionentheorie analytische Funktionen von λ sind, dann hängen auch die Lösungen analytisch von λ ab[1]).

In unserer Differentialgleichung (5·19) tritt nun der Parameter λ linear auf, also hängen die Lösungen $z_i(x, \lambda)$, die man durch feste, von λ unabhängige Anfangsbedingungen festlegen kann, regulär von λ ab, und zwar sind die $z_i(x, \lambda)$ *ganze* Funktionen von λ für festes x aus $a \leq x \leq b$.

Wenn λ in den Randbedingungen analytisch vorkommt, so ist $\Delta(\lambda)$ auch analytisch in λ. In den Beispielen der Tafel I kommt λ, wenn überhaupt, so stets linear in den Randbedingungen vor, d. h. die $U_\mu[z_i]$ sind ganze Funktionen in λ. Es ist also auch $\Delta(\lambda)$ eine ganze Funktion in λ; daher gilt:

$\Delta(\lambda)$ ist entweder identisch Null, dann ist jedes λ Eigenwert, oder $\Delta(\lambda) = 0$ besitzt höchstens abzählbar unendlich viele isolierte Nullstellen ohne Häufungspunkt im Endlichen. Man kann dann die Eigenwerte λ_i nach der Größe ihrer Beträge ordnen:

$$0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \cdots$$

Beispiel I: Jedes λ ist Eigenwert.

Bei dem Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} L[y] &= -y'' - \lambda y = 0, \\ U_1[y] &= y(0) - y(1) = 0, \\ U_2[y] &= y'(0) + y'(1) = 0 \end{aligned}$$

bilden mit $\lambda = k^2 \neq 0$ die Funktionen

$$z_1 = \sin kx, \qquad z_2 = \cos kx$$

ein Fundamentalsystem[2]). Die Determinante (5·23) lautet hier

$$\begin{vmatrix} -\sin k & 1 - \cos k \\ k(1 + \cos k) & -k \sin k \end{vmatrix} = k(\sin^2 k + \cos^2 k - 1) = 0 .$$

Diese Gleichung ist für jedes k erfüllt, also *alle* Werte λ (auch komplexe Zahlen λ) sind Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind $y = \cos k\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

[1]) Vgl. z. B. J. HORN, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Aufl. Berlin u. Leipzig 1927, 8. Kapitel, S. 147ff. Der Parameter λ wird jetzt als komplexe Veränderliche aufgefaßt.

[2]) Ein Fundamentalsystem mit ganzen Funktionen von λ ist

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x, \qquad z_2 = \cos \sqrt{\lambda}\, x,$$

es erfüllt die von λ freien Anfangsbedingungen

$$z_1(0) = 0, \quad z_1'(0) = 1, \quad z_2(0) = 1, \quad z_2'(0) = 0 .$$

Beispiel II: Knickproblem. Bei der Knickung eines homogenen Stabes mit eingespannten, aber verschieblichen Enden (Abb. 5·5) hat man das Eigenwertproblem

$$y^{\text{IV}} = -\lambda y'',$$
$$y'(0) = y'''(0) = y'(l) = y'''(l) = 0.$$

Dabei ist $\lambda = \frac{P}{\alpha}$ (mit P als Druckkraft, α als Biegesteifigkeit), und die Randbedingungen besagen Verschwinden der Neigung und der Querkraft an den Enden. Hier ist jeder Wert λ Eigenwert zur Eigenfunktion $y = \text{const}$, der Stab kann sich parallel zu sich verschieben. Außerdem gibt es eine Folge von Eigenwerten

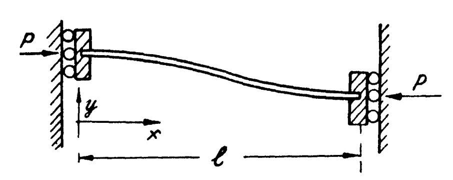


Abb. 5·5. Knickproblem für einen Stab mit eingespannten verschieblichen Enden.

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

zu denen die Eigenfunktionen $y_n = \cos \frac{n \pi x}{l}$ gehören, diese Eigenwerte sind somit sämtlich „zweifache".

Zusatz über zweifache Eigenwerte. Bei dem letzten Beispiel trat das Wort zweifacher Eigenwert auf. Die Definition über mehrfache Eigenwerte wird in 5·9 gegeben. Hier sei nur gesagt: Eine Zahl λ heißt zweifacher Eigenwert, wenn es zu ihr genau zwei voneinander linear unabhängige Eigenfunktionen gibt. Wir beweisen den in der folgenden Nummer 5·8 benutzten Satz: Ist λ_j ein zweifacher Eigenwert, so verschwindet die Ableitung der in (5·23) aufgetretenen Determinante $\Delta(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = \lambda_j$ [1])

$$(5·24) \qquad 0 = \left(\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \right)_{\lambda = \lambda_j}.$$

Zu einem solchen Eigenwerte λ_j gibt es nämlich nach der eben gegebenen Definition zwei voneinander linear unabhängige Eigenfunktionen $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, also zwei linear voneinander unabhängige Lösungssysteme $C_i^{(1)}$, $C_i^{(2)}$ des Gleichungssystems (5·22). Da konstante Faktoren bei den C_i noch frei sind, können wir $C_1^{(1)} = C_2^{(2)} = 1$ verfügen [evtl. nach Umnumerierung der $z_1, z_2, \ldots, z_{2m}$, falls bei der ursprünglichen Numerierung $C_1^{(1)}$ oder $C_2^{(2)}$ verschwinden sollte; dabei ändert sich bei der Determinante (5·23) höchstens das Vorzeichen]. Nun addieren wir in der Determinante (5·23) (ausgeschrieben ist sie in (5·13)), die mit $C_i^{(1)}$ multiplizierten i-ten Spalten für

[1]) Der Satz läßt sich auch umkehren und auf mehrfache Eigenwerte ausdehnen: Die Vielfachheit eines Eigenwertes λ_j stimmt mit der Vielfachheit überein, die λ_j als Nullstelle von $\Delta(\lambda)$ hat. Siehe Fußnote 2) auf S. 92.

$i = 2, 3, \ldots, 2m$ zur 1. Spalte, und die mit $C_i^{(2)}$ multiplizierten i-ten Spalten $i = 1, 3, 4, \ldots, 2m$ zur 2. Spalte, dann stehen in der 1. und 2. Spalte von (5·13) nach (5·22) nur Nullen. Differenziert man nun die Determinante, indem man jeweils eine Spalte differenziert und die entstehenden Determinanten addiert, so ist die Ableitung für $\lambda = \lambda_j$ Null, da jede der einzelnen Determinanten noch mindestens eine Spalte mit nur Nullen enthält, d. h. es gilt (5·24).

5·8. Verhalten der Greenschen Resolvente an der Stelle eines Eigenwertes λ. Es sei $\lambda = \lambda_1$ ein Eigenwert, und zwar eine einfache Nullstelle der Eigenwertdeterminante (5·23) $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda_1) = 0\,,$$

Es ist $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\Delta^*(\lambda)$ und $\Delta^*(\lambda)$ ist eine analytische Funktion von λ mit $\Delta^*(\lambda_1) \neq 0$.

Die GREENsche Funktion hat nach (5·14) die Gestalt

$$G(x, \xi, \lambda) = G_1(x, \xi, \lambda) + G_2(x, \xi, \lambda) = \frac{H(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} + G_2(x, \xi, \lambda)\,.$$

Dabei sind H und G_2 in λ ganze Funktionen, daher ist $G(x, \xi, \lambda)$ eine „meromorphe" Funktion in λ, d. h. G ist in der ganzen λ-Ebene mit Ausnahme von Polstellen regulär, und zwar hat G Pole in den Eigenwerten λ_i; Multiplikation mit $(\lambda - \lambda_1)$ ergibt

$$G(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1) = \frac{H(x, \xi, \lambda)}{\Delta^*(\lambda)} + (\lambda - \lambda_1) G_2(x, \xi, \lambda)\,. \tag{5·25}$$

Der linksstehende Ausdruck ist für $\lambda = \lambda_1$ nicht definiert, da dann die GREENsche Funktion nicht existiert. Der Ausdruck auf der rechten Seite hat jedoch einen wohlbestimmten Grenzwert, wenn λ gegen λ_1 strebt. Es bleibt dabei der Quotient $\frac{H}{\Delta^*}$ regulär, das zweite Glied der rechten Seite strebt gegen Null, mithin hat die linke Seite $G(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1)$ für $\lambda \to \lambda_1$ den Grenzwert

$$\frac{H(x, \xi, \lambda_1)}{\Delta^*(\lambda_1)}\,,$$

sie ist also insbesondere regulär für $\lambda = \lambda_1$, aufgefaßt als Funktion von λ bei beliebigem, aber festgehaltenem x und ξ. Wir behaupten nun, diese Grenzfunktion $\frac{H(x, \xi, \lambda_1)}{\Delta^*(\lambda_1)}$ ist eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion. $H(x, \xi, \lambda_1)$ ist nämlich $2m$-mal stetig differenzierbar und genügt nach 5·3 als lineare Kombination aus den Lösungen des Fundamentalsystems im ganzen Intervall $a \leq x \leq b$ der Differentialgleichung (5·19) für $\lambda = \lambda_1$. Ferner erfüllt $G(x, \xi, \lambda)$ für jedes $\lambda \neq \lambda_i$ die Randbedingungen $U_\mu = 0$, es ist mithin

$$U_\mu[G(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1)] = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq \lambda_i\,,$$

also auch in der Grenze[1])

$$U_\mu [\lim_{\lambda \to \lambda_1} G(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1)] = 0,$$

d. h. $H(x, \xi, \lambda_1)$ erfüllt ebenfalls die Randbedingungen. $H(x, \xi, \lambda_1)$ ist somit bei festem ξ eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion, und da zu einem einfachen Eigenwert nach 5·7 nicht zwei voneinander linear unabhängige Eigenfunktionen existieren, kann man ansetzen, wenn y_1 irgendeine zu λ_1 gehörige fest herausgegriffene Eigenfunktion ist: $H(x, \xi, \lambda_1) = \text{const} \cdot y_1(x)$. Die Konstante, die wir gleich C setzen, kann noch von ξ abhängen, also $H(x, \xi, \lambda_1) = y_1(x) \cdot C(\xi)$.

Die GREENsche Funktion $G(x, \xi, \lambda)$ ist für Werte λ, die keine Eigenwerte sind, nach 5·4 symmetrisch in x und ξ. Also ist auch $G(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1)$ für $\lambda \neq \lambda_i$ symmetrisch in x und ξ, daher auch die Grenzfunktion für $\lambda = \lambda_1$ und damit $H(x, \xi, \lambda_1)$. Diese Funktion muß also die Gestalt haben

$$H(x, \xi, \lambda_1) = y_1(x)\, y_1(\xi) \cdot C^*,$$

wobei jetzt die Konstante C^* nicht mehr von x oder ξ abhängt. Man kann somit für beliebiges λ schreiben:

$$H(x, \xi, \lambda) = y_1(x)\, y_1(\xi) \cdot C^* + (\lambda - \lambda_1)\, H^*,$$

wobei H^* wieder eine ganze Funktion in λ ist Es ist also mit $C_1 = \frac{C^*}{\Delta^*(\lambda_1)}$

$$(5{\cdot}26) \qquad G(x, \xi, \lambda) = \frac{C_1\, y_1(x)\, y_1(\xi)}{(\lambda - \lambda_1)} + G_1^*(x, \xi, \lambda),$$

wobei G_1^* eine in λ meromorphe, an der Stelle $\lambda = \lambda_1$ jedoch reguläre Funktion von λ ist. Genau so kann man an anderen Eigenwertstellen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ vorgehen, sofern diese λ_i einfache Eigenwerte sind, und erhält, wenn $y_2, y_3, \ldots$ die zugehörigen Eigenfunktionen sind,

$$(5{\cdot}27) \qquad G(x, \xi, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{C_\nu\, y_\nu(x)\, y_\nu(\xi)}{\lambda - \lambda_\nu} + G_s^*(x, \xi, \lambda),$$

wobei G_s^* in λ meromorph, an den Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ regulär ist und Pole an den Stellen der weiteren Eigenwerte $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \ldots$ hat.

5·9. Mehrfache Eigenwerte. Definition: *Man nennt einen Eigenwert λ einen r-fachen, oder man sagt, er besitze die Vielfachheit r, wenn es genau r voneinander linear unabhängige Eigenfunktionen $y_1, y_2, \ldots, y_r$ gibt, die zu demselben Eigenwert λ gehören*:

$$(5{\cdot}28) \qquad M[y_i] = \lambda N[y_i]; \quad U_\mu[y_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Diese Definition gilt genau so bei partiellen Differentialgleichungen, wo man nur $y(x)$ durch $z(x, y \ldots)$ zu ersetzen hat.

[1]) $G(x, \xi)$ ist nach (5·14) eine endliche Summe aus den z_i, also ist Vertauschung von Differentiationen und Grenzübergang erlaubt.

Als einfaches Beispiel sei das selbstadjungierte Problem eines elastisch gebetteten Druckstabes genannt:

$$(5{\cdot}29) \qquad \begin{cases} y^{IV} + 4y = -\lambda y'', \\ y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0. \end{cases}$$

Hier ist der kleinste Eigenwert $\lambda_1 = 5$ ein doppelter, zu ihm gehören die beiden voneinander linear unabhängigen Eigenfunktionen $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin 2x$.

Das selbstadjungierte Problem

$$-y^{VI} - 49y'' = \lambda(14y^{IV} + 36y),$$
$$y = y'' = y^{IV} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = \pi$$

hat $\lambda = 1$ als dreifachen Eigenwert mit den Eigenfunktionen $y_k = \sin kx$ für $k = 1, 2, 3$, und man kann leicht Beispiele für Eigenwerte mit jeder gewünschten Vielfachheit r angeben, z. B. Probleme

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu y^{(2\nu)} = \lambda \sum_{\nu=0}^{m} g_\nu y^{(2\nu)}$$

mit konstanten Koeffizienten f_ν, g_ν konstruieren, bei denen $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin rx$ als Eigenfunktionen zu demselben Eigenwert gehören.

Beim Auftreten mehrfacher Eigenwerte lassen sich die wesentlichen Ergebnisse von dem Fall einfacher Eigenwerte übertragen, jedoch werden die Beweise komplizierter und erfordern weitergehende Hilfsmittel. Es genüge daher hier, die Ergebnisse mitzuteilen und wegen einiger Beweise auf die Literatur zu verweisen.

Gehören die voneinander unabhängigen Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_r$ als Eigenfunktionen einer selbstadjungierten volldefiniten Eigenwertaufgabe (4·5) bis (4·8) zum r-fachen Eigenwert λ, so sind auch die Funktionen

$$Y_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\varrho\sigma} y_\sigma \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

bei beliebigen Konstanten $a_{\varrho\sigma}$ Eigenfunktionen zu demselben Eigenwert λ. Insbesondere kann man die $a_{\varrho\sigma}$ so bestimmen, daß die Funktionen Y_ϱ zueinander im verallgemeinerten Sinne orthogonal werden:

$$(5{\cdot}30) \qquad \int_a^b Y_\varrho N[Y_\sigma]\,dx = 0 \qquad \text{für} \quad \varrho \neq \sigma,$$

und einen konstanten Faktor bei Y_ϱ kann man bis auf das Vorzeichen so festlegen, daß Y_ϱ „normiert" ist, d. h.

$$(5{\cdot}31) \qquad \int_a^b Y_\varrho N[Y_\varrho]\,dx = 1 \qquad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, \ldots, r.$$

Daß es möglich ist, Konstanten $a_{\varrho\sigma}$ mit dieser Eigenschaft zu ermitteln und einen solchen „Orthogonalisierungsprozeß" durchzuführen, wird unter

anderen Gesichtspunkten in 15·4 bewiesen; es läßt sich jedoch auch unmittelbar einsehen, indem man

$$Y_1 = \frac{y_1}{\sqrt{\int_a^b y_1 N[y_1]\,dx}}$$

setzt und die übrigen Y_ϱ rekursiv berechnet nach den Formeln[1])

$$(5\cdot32)\quad \left\{\begin{aligned} Y^*_{s+1}(x) &= y_{s+1}(x) - \sum_{\sigma=1}^{s} Y_\sigma(x) \int_a^b Y_\sigma(\xi) N[y_{s+1}(\xi)]\,d\xi \\ Y_{s+1}(x) &= \frac{Y^*_{s+1}(x)}{\sqrt{\int_a^b Y^*_{s+1}(\xi) N[Y^*_{s+1}(\xi)]\,d\xi}} \end{aligned}\right\} \quad (s = 1, 2 \ldots, r-1).$$

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen y_ϱ kann keines der Y^*_σ identisch verschwinden, und es sind daher alle Nenner in (5·32) von Null verschieden.

Nun denken wir uns den Orthogonalisierungsprozeß bereits ausgeführt und schreiben statt Y wieder y. Auch die zu anderen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen kann man normieren und, soweit sie zu mehrfachen Eigenwerten gehören, orthogonalisieren, so daß die Formel (4·12) übergeht in

$$(5\cdot33)\qquad \int_a^b y_i N[y_k]\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{,, } i = k. \end{cases}$$

Satz: *Es gibt zu der selbstadjungierten volldefiniten Eigenwertaufgabe* (4·5) *bis* (4·8) *ein normiertes, im verallgemeinerten Sinne orthogonales System von Eigenfunktionen* y_i. *Für dieses bestehen die Beziehungen* (5·33).

Nun sei $G(x, \xi, \lambda)$ wie in 5·6 die GREENsche Resolvente, welche also das inhomogene Randwertproblem (5·21) durch die Formel (5·20) löst. Ist nun λ_1 ein r-facher Eigenwert, so läßt sich $G(x, \xi, \lambda)$ in der (5·27) genau entsprechenden Gestalt schreiben:

$$(5\cdot34)\qquad G(x, \xi, \lambda) = \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{C_\varrho y_\varrho(x) y_\varrho(\xi)}{\lambda - \lambda_1} + G^*(x, \xi, \lambda),$$

wobei G^* in λ meromorph und bei $\lambda = \lambda_1$ regulär ist. Die y_ϱ sind als zueinander im verallgemeinerten Sinne orthogonal angenommen. Diese Darstellung der GREENschen Resolvente läßt sich mit Hilfe der Funktionentheorie durch Untersuchung des Residuums der GREENschen Resolvente beweisen[2]).

[1]) R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl., Berlin (1931) 42.

[2]) E. KAMKE, Definite selbstadjungierte Eigenwertaufgaben, Math. Z. 46 (1940) 242—250.

Man kann den Sachverhalt auch so ausdrücken: Die Darstellung (5·27) der GREENschen Resolvente ist auch im Falle mehrfacher Eigenwerte richtig, sofern man die zu einem mehrfachen Eigenwert λ_j gehörigen Eigenfunktionen zueinander im verallgemeinerten Sinne orthogonal gewählt hat.

Aus (5·34) läßt sich ein wichtiger Satz über die Lösbarkeit der inhomogenen Randwertaufgabe folgern

$$(5{\cdot}35)\qquad \begin{cases} M[u] - \lambda N[u] = h(x) \\ U_\mu[u] = 0 \end{cases}$$

für $\lambda = \lambda_j$. Die Aufgabe ist nicht für beliebige rechte Seiten $h(x)$ lösbar, aber für bestimmte Funktionen $h(x)$, und zwar stets, wenn $h(x)$ zu allen zu λ_j gehörigen Eigenfunktionen $y_1, y_2, \ldots, y_r$ orthogonal ist:

$$(5{\cdot}36)\qquad \int_a^b y_\varrho(x) h(x)\, dx = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Setzt man nämlich die Gl. (5·34) für die GREENsche Resolvente in die Lösungsformel (5·20) ein, so bleibt wegen (5·36) rechts nur

$$\int_a^b G^*(x, \xi, \lambda) h(\xi)\, d\xi$$

stehen. Da G^* bei $\lambda = \lambda_j$ regulär ist, folgt für $\lambda \to \lambda_j$

$$(5{\cdot}37)\qquad u(x) = \int_a^b G^*(x, \xi, \lambda_j) h(\xi)\, d\xi.$$

Daß die so ermittelte Grenzfunktion $u(x)$ tatsächlich die Randwertaufgabe (5·35) löst, bedarf noch eines genaueren Nachweises, der hier nicht erbracht werden soll; die allgemeine Lösung von (5·35) würde man aus (5·37) durch additives Hinzufügen der zu λ_j gehörigen Eigenfunktionen erhalten.

5·10. Semidefinite Eigenwertaufgaben. Bei einer semidefiniten Eigenwertaufgabe (4·5) bis (4·8)

$$M[y] = \lambda N[y]; \qquad U_\mu[y] = 0$$

tritt nach der Definition aus 4·9 unter den Eigenwerten auch die Zahl 0 auf. Z. B. bei den Biegeschwingungen eines prismatischen, beiderseits freien Stabes

$$y^{IV} = \lambda y; \qquad y''(0) = y'''(0) = y''(1) = y'''(1)$$

kommt der Eigenwert $\lambda = 0$ vor, und zwar als zweifacher Eigenwert mit den Eigenfunktionen $y = 1$ und $y = x$. Das Auftreten des Eigenwertes $\lambda = 0$ bedeutet nach 5·3 und 5·7, daß es zu dem Randwertproblem

$$(5{\cdot}38)\qquad \begin{cases} M[y] = r(x) \\ U_\mu[y] = 0 \end{cases}$$

keine GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ gibt. Man kann jedoch eine sogenannte „verallgemeinerte GREENsche Funktion“ $G(x, \xi)$ aufstellen, mit der das Rand-

wertproblem, sofern es überhaupt eine Lösung besitzt, durch die zu (5·4) analoge Formel

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi$$

gelöst wird. Auch die weitere hier in § 8ff. dargestellte Theorie läßt sich weitgehend auf die semidefiniten Eigenwertaufgaben übertragen, doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden[1]).

§ 6. Die Greensche Funktion bei partiellen Differentialgleichungen.

Die allgemeine Theorie wird bei partiellen Differentialgleichungen verwickelt und ist noch nicht als abgeschlossen anzusehen. Es soll hier nur für die einfachsten Fälle kurz einiges Wenige über die Greensche Funktion und weiter über Eigenwertprobleme gesagt werden[2]), nämlich das, was später (in Nr. 7·4, 11·2, 14·1 und § 19) gebraucht wird.

6·1. Grundbegriffe. Die formale Übertragung der in § 4 behandelten Grundbegriffe auf partielle Differentialgleichungen macht keine Schwierigkeiten. Die Differentialgleichung laute

$$M[z] = \lambda N[z], \tag{6·1}$$

wobei z die unbekannte Eigenfunktion, M und N gegebene lineare homogene Differentialoperatoren für Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$ und λ wie stets der Eigenwert ist. Hinzu kommen Randbedingungen

$$U_\mu[z] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k). \tag{6·2}$$

Die $U_\mu[z]$ sind dabei lineare homogene Differentialausdrücke in z, genommen auf gewissen gegebenen Randkurven (oder Randflächen) eines Gebietes B, das wir Grundgebiet nennen. Die Zahlen λ, für die es eine nicht identisch verschwindende, die Randbedingungen erfüllende Lösung von (6·1) (eine „Eigenfunktion") gibt, heißen Eigenwerte des Problems.

Eine nicht identisch verschwindende Funktion u der unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$ heißt eine „Vergleichsfunktion", wenn sie die Randbedingungen $U_\mu[u] = 0$ erfüllt und stetige partielle Ableitungen so hoher Ordnung besitzt, wie es zur Bildung von $M[u]$ und $N[u]$ gebraucht wird.

---

[1]) Näheres bei E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, New York, S. 190, und Math. Z. 46 (1940) 231—286, ferner R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 306.

[2]) Wegen aller Feinheiten und weiterreichenden Betrachtungen sei auf die ausführliche Darstellung in R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I und II, Berlin 1931 und 1937, verwiesen.

Das Eigenwertproblem heißt selbstadjungiert, wenn für zwei beliebige Vergleichsfunktionen u, w stets gilt

$$(6\cdot3)\qquad \begin{cases} \int\limits_{\mathfrak{B}} (uM[w] - wM[u])\,dv = 0\,, \\ \int\limits_{\mathfrak{B}} (uN[w] - wN[u])\,dv = 0\,. \end{cases}$$

Dabei sind die Integrale über das Grundgebiet B zu erstrecken, $dv = dx\,dy\ldots$ soll das Volumenelement bedeuten.

Das Eigenwertproblem wird definit genannt, wenn alle Eigenwerte λ_i reell sind und dasselbe Vorzeichen haben, und semidefinit, wenn alle λ_i reell sind, nicht verschiedenes Vorzeichen haben und die Zahl 0 unter den Eigenwerten vorkommt.

Das Eigenwertproblem heißt volldefinit, wenn für eine beliebige Vergleichsfunktion u stets

$$(6\cdot4)\qquad \int\limits_{\mathfrak{B}} uM[u]\,dv > 0\,, \qquad \int\limits_{\mathfrak{B}} uN[u]\,dv > 0$$

ist. Dann gilt: Ein volldefinites Eigenwertproblem ist definit, bei ihm sind alle vorhandenen Eigenwerte positiv. Denn ist z eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert λ, so ist

$$(6\cdot5)\qquad \lambda = \frac{\int\limits_{\mathfrak{B}} zM[z]\,dv}{\int\limits_{\mathfrak{B}} zN[z]\,dv} > 0\,.$$

Läßt man in der ersten Ungleichung von (6·4) an Stelle des Zeichens $>$ das Zeichen $\geqq$ zu, so ergibt sich auf die gleiche Weise, daß das Eigenwertproblem definit oder semidefinit ist.

Während aus der Volldefinitheit die Realität der Eigenwerte folgt, wird man nicht erwarten können, daß die Selbstadjungiertheit allein die Realität der Eigenwerte bedingt, denn dies gilt ja nicht einmal bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen, wie das Beispiel in 4·8 zeigt. Die Voraussetzungen der Selbstadjungiertheit und Volldefinitheit prüft man in Einzelfällen wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen nach durch Anwendung von Teilintegration oder entsprechender Hilfsmittel, wie des Gaussschen Integralsatzes usw., vgl. z. B. die Durchführung in 6·2. Da, wie bereits bemerkt, zur Zeit eine so allgemeine Theorie wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht gegeben werden kann, greifen wir im folgenden eine spezielle Problemklasse gewissermaßen als Beispiel heraus.

6·2. Eine spezielle Problemklasse. Wir legen Eigenwertprobleme folgender Art bei zwei unabhängigen Veränderlichen x, y zugrunde: Die Differentialgleichung laute:

$$(6\cdot6)\qquad M[z] \equiv -(pz_x)_x - (pz_y)_y + qz = \lambda N[z] \equiv \lambda g_0 z\,.$$

Dabei sei $z = z(x, y)$ die unbekannte Eigenfunktion, λ wie stets der Eigenwert, $p(x, y)$, $q(x, y)$ und $g_0(x, y)$ gegebene stetige Funktionen und überdies p und g_0 positiv und p mit stetigen partiellen Ableitungen nach x und y versehen. Ein Buchstabe x oder y als Index bedeutet partielle Differentiation nach der betreffenden Veränderlichen, also z. B.

$$(p z_x)_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

In der Ebene der unabhängigen Veränderlichen x, y sei ein abgeschlossener, einfach zusammenhängender Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben, der von einer stückweise glatten Randkurve Γ begrenzt wird (Abb. 6·1). Auf dem Rande Γ wird für $z(x, y)$ die Randbedingung vorgeschrieben[1]):

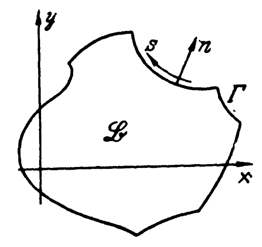


Abb. 6·1. Bereich $\mathfrak{B}$, positiv orientierter Rand Γ, äußere Normale n.

$$\alpha z + \beta \frac{\partial z}{\partial n} = 0. \tag{6·7}$$

α und β sind gegebene stetige, nicht zugleich verschwindende Funktionen der auf der Randkurve Γ von einem fest gewählten Randpunkte aus gemessenen Bogenlänge s.

Dabei bedeutet n die Richtung der äußeren Normalen (Abb. 6·1), es gilt[2]) wenn (n, x) bzw. (n, y) die Winkel zwischen den n, x, y Richtungen bezeichnen, für eine beliebige stetig differenzierbare Funktion $w(x, y)$

$$w_n \equiv \frac{\partial w}{\partial n} = w_x \cos(n, x) + w_y \cos(n, y). \tag{6·8}$$

Das der Teilintegration bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen hier entsprechende Hilfsmittel ist der GAUSSsche Integralsatz, der für eine beliebige, mit stetiger partieller Ableitung nach x versehene Funktion $f(x, y)$ lautet[3]):

$$\iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\Gamma} f(x, y) \cos(n, x)\, ds. \tag{6·9}$$

Die Randkurve Γ ist dabei im positiven Sinne zu durchlaufen.

---

[1]) Diese Randbedingung ist nicht so harmlos, wie sie vielleicht zunächst aussieht. Abgesehen davon, daß an etwaigen Knickstellen des Randes $\frac{\partial z}{\partial n}$ nicht definiert ist, kann man überhaupt bei partiellen Differentialgleichungen nicht allgemein fordern, daß die Lösungsfunktion die Randbedingungen in allen Randpunkten erfüllt. Über die genauere Formulierung der Randbedingungen siehe Fußnote 1) von S. 100, a. a. O, Bd. II, S. 508ff.

[2]) K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, Leipzig 1942, Bd. III, S. 433.

[3]) K. KNOPP, a. a. O. S. 347. Dort steht rechts das andere Vorzeichen, weil die Normale n nach innen gerichtet angenommen ist. Die Randkurve Γ ist dabei als positiv orientiert festgelegt (Abb. 6·1).

Haben α und β gleiches Vorzeichen und ist $q(x, y) > 0$, so ist das Problem volldefinit, wie man leicht unmittelbar durch Teilintegration nachprüft. Man braucht dazu nur das erste der beiden in (6·4) angegebenen Integrale zu untersuchen, da

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} uN[u]dv = \iint\limits_{\mathfrak{B}} g_0 u^2 dx\,dy > 0$$

erfüllt ist. Es ist

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} uM[u]dv = \iint\limits_{\mathfrak{B}} [-u\cdot(pu_x)_x - u(pu_y)_y + qu^2]dx\,dy.$$

Der Bestandteil $\iint\limits_{\mathfrak{B}} qu^2 dx\,dy$ ist > 0 wegen $q > 0$. Der erste Bestandteil läßt sich umformen, wenn man den GAUSSschen Integralsatz (6·9) auf die Funktion $f = u\cdot(pu_x)$ mit $f_x = u(pu_x)_x + pu_x^2$ anwendet. Man erhält

$$-\iint\limits_{\mathfrak{B}} u(pu_x)_x dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{B}} pu_x^2 dx\,dy - \int\limits_{\Gamma} puu_x \cos(n, x)ds.$$

Genau so ist beim zweiten Bestandteil

$$-\iint\limits_{\mathfrak{B}} u(pu_y)_y dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{B}} pu_y^2 dx\,dy - \int\limits_{\Gamma} puu_y \cos(n, y)ds.$$

Wegen (6·8)

$$u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) = u_n$$

folgt

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}} uM[u]dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{B}} [qu^2 + p(u_x^2 + u_y^2)]dx\,dy + \int\limits_{\Gamma} (-puu_n)ds.$$

Hieraus sieht man, daß die Bedingung (6·4) erfüllt ist, denn das Randintegral ist wegen der Randbedingung (6·7)

$$\alpha u = -\beta u_n$$

nichtnegativ; für $\beta \neq 0$ ist der Integrand $p\frac{\alpha}{\beta}u^2 \geqq 0$ und für $\beta = 0$ verschwindet er wegen $u = 0$.

Läßt man auch $q = 0$ zu, so liefert die Betrachtung, daß alle Eigenwerte $\lambda_i \geqq 0$ sind; dann kann es eintreten, daß auch die Zahl 0 Eigenwert ist (z. B. im Falle $\alpha = 0$, also der Randbedingung $u_n = 0$ ist die Zahl 0 Eigenwert mit der Eigenfunktion $u = \text{const}$).

Weiter läßt sich auch die Selbstadjungiertheit der Eigenwertaufgabe (6·6), (6·7) bequem mit Hilfe des GAUSSschen Integralsatzes (6·9) nachprüfen.

Setzt man darin

$$f = pu_x w - puw_x, \quad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (pu_x)_x w - (pw_x)_x u,$$

so gilt

$$\iint_{\mathfrak{B}} [(pu_x)_x w - (pw_x)_x u]\,dx\,dy = \int_{\Gamma} [pwu_x \cos(n, x) - puw_x \cos(n, x)]\,ds;$$

entsprechend für die y-Richtung:

$$\iint_{\mathfrak{B}} [(pu_y)_y w - (pw_y)_y u]\,dx\,dy = \int_{\Gamma} [pwu_y \cos(n, y) - puw_y \cos(n, y)]\,ds.$$

Addition ergibt mit Benutzung von (6·8)

$$(6\cdot10)\qquad \iint_{\mathfrak{B}} \{-wM[u] + uM[w]\}\,dx\,dy = \int_{\Gamma} p(wu_n - uw_n)\,ds.$$

Das ist die sogenannte „GREEN*sche Formel*" (analog zur „DIRICHLET*schen Formel*" bei gewöhnlichen Differentialgleichungen).

Bei der Randbedingung (6·7) verschwindet nun das rechtsstehende Integral, denn für $\beta \neq 0$ ist $u_n = -\frac{\alpha}{\beta}u$, $w_n = -\frac{\alpha}{\beta}w$, also $wu_n - uw_n = 0$, und für $\beta = 0$ ist $u = w = 0$, d. h. aber, das Randwertproblem (6·6), (6·7) ist selbstadjungiert.

6·3. Die Greensche Funktion, Vorbemerkungen. Diese Nummer enthält noch keine Beweise, sondern soll nur in die GREENsche Funktion bei den partiellen Differentialgleichungen einführen. Man will auch hier wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen das Randwertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe einer GREENschen Funktion lösen.

Bei beliebiger stetiger rechter Seite $\varphi(x, y)$ der Differentialgleichung (mit $M[z]$ nach (6·6))

$$(6\cdot11)\qquad M[z] = \varphi(x, y)$$

und der homogenen Randbedingung $\alpha z + \beta z_n = 0$ auf dem Rande Γ soll die Lösung in der Gestalt gegeben sein

$$(6\cdot12)\qquad z(x, y) = \iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

mit der GREENschen Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$, die auch hier die „Einflußfunktion" darstellt.

Um uns eine Vorstellung von der Einflußfunktion zu machen, betrachten wir zunächst als Beispiel den Fall $p = 1$, $q = 0$, also die inhomogene Potentialgleichung

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\varphi(x, y)$$

und etwa die Randbedingung $z = 0$ auf Γ. Dann läßt sich $z(x, y)$ deuten als Durchsenkung einer am Rande Γ eingespannten homogenen belasteten Membran, wobei $\varphi(x, y)$ das Produkt aus der Belastungsdichte $\Phi(x, y)$ und einem von der Dicke und den elastischen Eigenschaften der Membran abhängenden konstanten Faktor C ist. Denkt man sich nun eine Last der Größe 1 auf einer kleinen Kreisfläche vom Radius ϱ um den Punkt ξ, η gleichförmig verteilt aufgebracht und die Membran sonst unbelastet, so entsteht eine Durchsenkung $z(x, y)$, die noch von der Größe der Kreisfläche abhängt. Denkt man sich weiter den Kreisradius ϱ gegen Null gehend (bei festgehaltener Lastgröße = 1), anschaulich gesprochen nach Art einer nadelförmig angreifenden Belastung, so konvergieren die zugehörigen Durchsenkungen

gegen die Einflußfunktion, die hier ebenso wie in 5·1 beim belasteten Stab die GREENsche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ darstellt. Im Gegensatz zum belasteten Stab bleiben aber die Durchsenkungen bei der belasteten Membran nicht mehr endlich, sondern gehen bei Annäherung an die Laststelle logarithmisch gegen Unendlich. Es sei zur Erläuterung die GREENsche Funktion für eine kreisförmige Membran vom Halbmesser 1 angegeben:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\ln r + \frac{1}{4\pi}\ln\left[(1 - x\xi - y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2\right] \tag{6·13}$$

mit

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,.$$

Abb. 6·2 zeigt die GREENsche Funktion bei festem ξ, η als Funktion von x und y in axonometrischer Darstellung.

Man kann die GREENsche Funktion G durch folgende Forderungen festlegen: $G(x, y; \xi, \eta)$ erfüllt bei festem ξ, η als Funktion von x, y die Randbedingungen und die Differentialgleichung $M[G] = 0$ bis auf die Stelle $x = \xi$, $y = \eta$. (Dabei sei ξ, η ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$.) An dieser Stelle hat G eine Singularität, und zwar soll sein

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_0^{2\pi\varrho} \frac{\partial G}{\partial n}\, ds = \frac{-1}{p(\xi, \eta)}\,. \tag{6·14}$$

Diese Bedingung entspricht der Sprungbedingung (5·6) bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Das Integral ist über einen kleinen Kreis vom Radius ϱ um den Punkt ξ, η zu erstrecken (Abb. 6·3), und dann soll der Grenzübergang $\varrho \to 0$ ausgeführt werden. Es kann also $\frac{\partial G}{\partial n}$ nicht beschränkt bleiben; z. B. für $p = 1$, $q = 0$, also für den LAPLACEschen Differentialausdruck

$$M[f] = -\Delta f$$

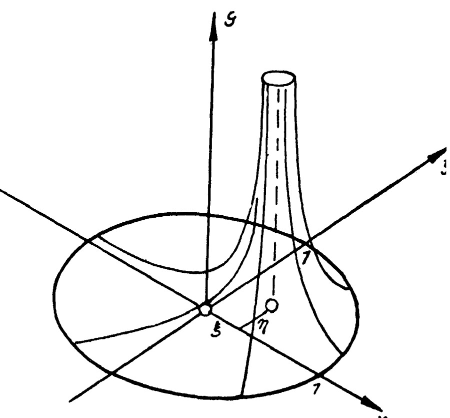


Abb. 6·2. GREENsche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ zum Differentialausdruck Δz mit der Randbedingung $z = 0$ für $x^2 + y^2 = 1$.

hat bei beliebigem Bereich $\mathfrak{B}$ die GREENsche Funktion die Gestalt $G = \frac{1}{2\pi}\ln r$ + stetige Funktion mit $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

(6·13) gab als Beispiel die GREENsche Funktion mit dem Einheitskreis als Bereich $\mathfrak{B}$ und $\beta = 0$. Es ist dann $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r}$ + stetige Funktion.

Damit wird

$$\int_0^{2\pi\varrho} \frac{\partial G}{\partial n}\, ds = -1 + 2\pi\varrho \cdot R\,,$$

wobei R beschränkt ist; also bleibt in der Grenze $\varrho \to 0$ nur die Zahl -1 übrig, wie es (6·14) verlangt.

6·4. Lösung des Randwertproblems durch die Greensche Funktion. Auch bei der allgemeinen von uns betrachteten Differentialgleichung (6·6) hat G eine logarithmische Singularität[1])

$$G = \frac{a(x, y;\, \xi, \eta)}{2\pi p(\xi, \eta)} \ln r + b(x, y;\, \xi, \eta)\,, \tag{6·15}$$

wobei a und b stetige, mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen versehene Funktionen mit $a(\xi, \eta;\, \xi, \eta) \equiv -1$ sind. Die tiefliegende Frage nach der Existenz einer GREENschen Funktion kann hier nicht erörtert werden[1]). Es wird hier vielmehr angenommen, es gebe eine Funktion $G(x, y;\, \xi, \eta)$, die die Randbedingung (6·7) und die Differentialgleichung erfüllt und sich in der Umgebung von $x = \xi$, $y = \eta$ in der angegebenen Gestalt (6·15) darstellen läßt. Dann ist die zuerst aufgestellte Forderung (6·14) über den Grenzwert des kleinen Randintegrals

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_0^{2\pi\varrho} \frac{\partial G}{\partial n}\, ds = \frac{-1}{p(\xi, \eta)}$$

von selbst erfüllt.

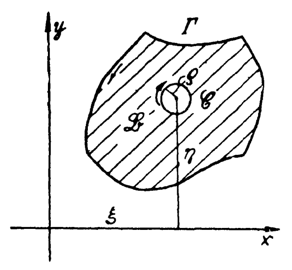


Abb. 6·3. Zur Singularität der GREENschen Funktion.

Die so eingeführte GREENsche Funktion $G(x, y;\, \xi, \eta)$ löst das Randwertproblem. Um das einzusehen, setze man in der GREENschen Formel (6·10) $w = z$, also $M[w] = \varphi$, und $u = G(x, y;\, \xi, \eta)$ ein und integriere über das gegebene Gebiet, wobei ein kleiner Kreis vom Radius ϱ um den Punkt ξ, η ausgeschnitten ist. Das Integrationsgebiet ist in Abb. 6·3 schraffiert. Als Rand des Integrationsgebietes tritt jetzt außer der Randkurve Γ noch der Rand C des kleinen Kreises auf. Um aber anzudeuten, daß in der folgenden Gleichung der Rand C im negativen Umlaufssinn zu durchlaufen ist (Abb. 6·3), schreiben wir als Rand $\Gamma - C$. Es ist im ganzen Integrationsbereich $M[G] = 0$, und es bleibt

$$\iint_{\mathfrak{B}} G(x, y;\, \xi, \eta)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Gamma - C} p\left(z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial z}{\partial n}\right) ds\,.$$

Da z und G beide die homogene Randbedingung (6·7) erfüllen, fällt wie

---

[1]) R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl., Berlin (1931), S. 320 ferner Bd. II (1937), Kap. VII, S. 471 ff. Auch die Frage der „zulässigen“ Gebiete 𝔅 wird dort ausführlich behandelt (Bd. II, S. 262 ff., 511 ff.).

in 6·2 das Integral über den äußeren Rand Γ fort. Beim Integral über dem Kreisrand C wird beim Grenzübergang $\varrho \to 0$

$$\int_{-C} p \frac{\partial z}{\partial n} G ds \to 0 \quad \text{und} \quad \int_{-C} pz \frac{\partial G}{\partial n} ds \to z(\xi, \eta).$$

Hierbei ist von der logarithmischen Singularität Gebrauch gemacht, G wächst wie $\ln \varrho$, die Integrationslänge ist $2\pi\varrho$, und $\varrho \ln \varrho$ geht für $\varrho \to 0$ gegen 0. Also ist

$$\iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) \varphi(x, y)\, dx\, dy = z(\xi, \eta).$$

Das ist die behauptete Lösungsformel, man braucht nur noch x, y mit ξ, η zu vertauschen. Die GREENsche Funktion ändert sich dabei nicht; wir zeigen die Symmetrie

(6·16) $$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y).$$

Dazu betrachten wir zwei verschiedene „Aufpunkte" ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 und nennen die zu ihnen gehörigen GREENschen Funktionen kurz G_1, G_2:

$$G_1 = G(x, y;\ \xi_1, \eta_1),$$
$$G_2 = G(x, y;\ \xi_2, \eta_2).$$

Diese setzen wir als $u = G_1$ und $w = G_2$ in die GREENsche Formel (6·10) ein und integrieren über das gegebene Gebiet $\mathfrak{B}$, wobei wir um die beiden Aufpunkte kleine Kreise vom Radius ϱ ausschneiden. Das Integrationsgebiet ist in Abb. 6·4 schraffiert; wir haben drei Ränder R_1, R_2, R_3, wobei die Randkurven R_1 und R_2 in negativem Umlaufssinn zu durchlaufen sind. Es ist

$$\iint_{\mathfrak{B}} \{- G_2 M[G_1] + G_1 M[G_2]\}\, dx\, dy = 0,$$

weil G_1 und G_2 (abgesehen von den Aufpunktsstellen) die Gleichung erfüllen

$$M[G_1] = M[G_2] = 0.$$

Nach der GREENschen Formel ist daher

$$0 = \int_{R_3 - R_1 - R_2} p\left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n}\right) ds.$$

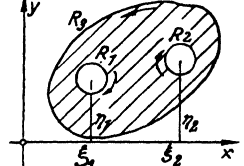


Abb. 6·4. Zur Symmetrie der GREENschen Funktion.

Nun ist $\int_{R_3} \cdots = 0$, weil G_1 und G_2 die Randbedingung (6·7) erfüllen. Aus $\int_{-R_1} \cdots$ wird beim Grenzübergang $\varrho \to 0$

$$\int_{-R_1} p G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} ds \to 0 \quad \text{und} \quad -\int_{-R_1} p G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} ds \to -G_2(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2).$$

Stellt man die entsprechenden Überlegungen bei R_2 an, so erhält man in

$$G_1(\xi_2, \eta_2;\ \xi_1, \eta_1) - G_2(\xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2) = 0$$

die behauptete Symmetrieeigenschaft der GREENschen Funktion.

6·5. Andere Typen partieller Differentialgleichungen. Die Überlegungen von 6·2 und 6·4 lassen sich sinngemäß übertragen auf die Gleichung

$$(6{\cdot}17) \qquad M[z] = -(p z_{x_1})_{x_1} - (p z_{x_2})_{x_2} - (p z_{x_3})_{x_3} + q z = \lambda g_0 z\,,$$

wo $z(x_1, x_2, x_3)$ eine Funktion der drei unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 ist; mit der Randbedingung $\alpha z + \beta \frac{\partial z}{\partial n} = 0$ auf einer Randfläche lassen sich Selbstadjungiertheit und für $\alpha \cdot \beta \gtrsim 0$ die Volldefinitheit des Problems wie bei nur zwei unabhängigen Größen x, y in 6·2 beweisen. Der Hauptunterschied besteht dagegen darin, daß die GREENsche Funktion $G(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ jetzt eine andere Singularität hat, nicht mehr eine logarithmische wie in (6·15), und zwar ist jetzt

$$G = \frac{a(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{4\pi p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \cdot \frac{1}{r} + b(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

mit

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}\,.$$

Es sind a und b mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Funktionen, die durch die Forderungen festgelegt werden, daß G außer für $r = 0$ die zu (6·17) gehörige homogene Differentialgleichung $M[G] = 0$ und die Randbedingungen erfüllen soll. Auf die Frage nach der Existenz der GREENschen Funktion kann hier wieder nicht eingegangen werden, vgl. die Bemerkungen am Anfang von 6·4. Die Symmetrie von G läßt sich dagegen leicht ebenso wie in 6·4 beweisen.

Auch bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung kann man GREENsche Funktionen aufstellen. Bei der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta z \equiv \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \lambda g_0 z$$

und zwei unabhängigen Variablen x, y hat die GREENsche Funktion die Gestalt

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + b(x, y; \xi, \eta)$$

mit $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Die mit ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich stetige Funktion $b(x, y; \xi, \eta)$ ist so zu bestimmen, daß G (außer für $r = 0$) der Differentialgleichung $\Delta\Delta G = 0$ und den Randbedingungen genügt.

§ 7. Beziehungen zu Integralgleichungen.

7·1. Eingliedklasse und Integralgleichungen. Wie in 5·4 sei $G(x, \xi)$ die GREENsche Funktion zu dem Differentialausdruck $M[y]$ bei den Randbedingungen

$$U_\mu[y] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Sie existiert nach 5·6 genau dann, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert des Problems (4·5) bis (4·8) ist. Das setzen wir jetzt voraus. Dann ist die Lösung des Randwertproblems $M[y] = r(x)$, $U_\mu[y] = 0$ bei beliebigem stetigem $r(x)$ durch die allgemeine Lösungsformel (5·4) gegeben. Da nun für eine

Eigenfunktion die Differentialgleichung (4·5) gilt, entsteht aus (5·4) mit $r(x) = \lambda N[y]$ für die Eigenfunktion $y(x)$ die Beziehung

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) N[y(\xi)] d\xi . \tag{7·1}$$

Eine derartige Beziehung nennt man für $n > 0$ eine lineare homogene „Integrodifferentialgleichung".

Für $n = 0$, also für die spezielle Problemklasse $N[y] = g_0(x) \cdot y$ erhält man bei positiver Funktion $g_0(x)$ mit

$$\varphi(x) = \sqrt{g_0(x)}\, y(x), \quad K(x, \xi) = \sqrt{g_0(x) g_0(\xi)}\, G(x, \xi)$$

für $\varphi(x)$ die Gleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi .$$

Sie ist eine sogenannte lineare homogene Integralgleichung zweiter Art. Ist das Eigenwertproblem selbstadjungiert, so ist $G(x, \xi)$ und damit auch der „Kern" $K(x, \xi)$ symmetrisch in x und ξ.

Probleme gleicher Art erhält man allgemeiner bei der Eingliedklasse (Nr. 4·7); bei ihr ist $N[y]$ nach (4·20) durch $(-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$ gegeben, und die Lösungsformel (7·1) geht über in

$$y(x) = (-1)^n \lambda \int_a^b G(x, \xi) [g_n(\xi) y^{(n)}(\xi)]^{(n)} d\xi .$$

Nach der bei der Eingliedklasse gemachten Voraussetzung (4·21) kann man das rechtsstehende Integral durch n-malige Teilintegration umformen in:

$$y(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial \xi^n} \cdot g_n(\xi) y^{(n)}(\xi) d\xi .$$

Hier kann man n-mal unter dem Integralzeichen differenzieren[1]), da die Ableitungen

$$\frac{\partial^{\nu+n} G(x, \xi)}{\partial x^\nu \partial \xi^n}$$

nach dem Zusatz zu 5·3 (es ist $n < m$, also $\nu + n \leq 2m - 2$ erfüllt) für $0 \leq \nu \leq n$ stetige Funktionen sind. Somit folgt

$$y^{(n)}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} g_n(\xi) y^{(n)}(\xi) d\xi .$$

Setzt man im Falle einer positiven Funktion $g_n(x)$

$$\sqrt{g_n(x)} \cdot y^{(n)}(x) = \varphi(x) \tag{7·2}$$

[1]) K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. III, 7. Aufl. (1942), S. 317.

und

$$K(x, \xi) = \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \sqrt{g_n(x) g_n(\xi)}, \tag{7·3}$$

so hat man für φ wieder die gewöhnliche lineare homogene Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi .$$

Der Kern $K(x, \xi)$ ist symmetrisch, wenn $G(x, \xi)$ symmetrisch ist.

Wir fragen nun, ob auch umgekehrt den nicht identisch verschwindenden stetigen Lösungen $\varphi(x)$ der Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \sqrt{g_n(x)\, g_n(\xi)}\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{7·4}$$

Eigenfunktionen $y(x)$ des zugehörigen Problems der Eingliedklasse entsprechen, machen jedoch zu dieser Untersuchung die folgenden Zusatzvoraussetzungen:

(7·5)
1. Es sei $3n < 2m - 1$.
2. Unter den Randbedingungen $U_\mu\,[y] = 0$ kommen die Bedingungen vor:
$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0$.

Für die speziellen Eigenwertprobleme ist $n = 0$, und man hat dann keine zusätzlichen Voraussetzungen.

Zunächst folgt aus der Forderung $3n < 2m - 1$, daß die Ableitung $\frac{\partial^{3n} G(x, \xi)}{\partial x^{2n} \partial \xi^n}$ noch stetig ist. Ist $\varphi(x)$ eine stetige Lösung von (7·4), so liefert n-malige Differentiation von (7·4) die Existenz einer stetigen Ableitung $\varphi^{(n)}(x)$. Wir können also die Funktion

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\sqrt{g_n(\xi)}\, \varphi(\xi)\right) d\xi \tag{7·6}$$

bilden und beweisen, daß diese Funktion eine Eigenfunktion des Problems der Eingliedklasse ist. (7·6) ist nach (5·4) gleichwertig mit

$$M[y] = \left(\sqrt{g_n(x)}\, \varphi(x)\right)^{(n)}; \quad U_\mu[y] = 0;$$

y erfüllt also alle Randbedingungen. Ferner ergibt sich aus (7·6) durch n-malige Teilintegration, da $G(x, \xi)$ die zusätzlich geforderten Randbedingungen (7·5) erfüllt:

$$y(x) = (-1)^n \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial \xi^n} \sqrt{g_n(\xi)}\, \varphi(\xi)\, d\xi .$$

n-malige Differentiation nach x liefert unter Benutzung von (7·4)

$$y^{(n)}(x) = (-1)^n \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x,\xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \sqrt{g_n(\xi)}\, \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{(-1)^n \varphi(x)}{\lambda \sqrt{g_n(x)}}$$

und damit $\quad M[y] = \left(\sqrt{g_n}\varphi\right)^{(n)} = (-1)^n \lambda [g_n y^{(n)}]^{(n)}$;

y genügt also auch der Differentialgleichung und ist mithin eine Eigenfunktion.

Satz: *Selbstadjungierte Eigenwertprobleme der Eingliedklasse* (4·22), (4·8), *bei denen* $\lambda = 0$ *kein Eigenwert ist und die Funktion* $g_n(x)$ *im Grundintervall* a, b *ein festes Vorzeichen hat, lassen sich mittels der* GREEN*schen Funktion überführen in lineare homogene Integralgleichungen zweiter Art mit reellem symmetrischem stetigem Kern. Jeder Lösung* $y(x)$ *der Eingliedklasse läßt sich nach* (7·2) *eine Lösung der Integralgleichung* (7·4) *zuordnen. Unter den Zusatzvoraussetzungen* (7·5) *kann man auch umgekehrt aus jeder Lösung der Integralgleichung nach* (7·6) *eine Eigenfunktion des Problems der Eingliedklasse herstellen.*

7·2. Ergebnisse aus der Theorie der Integralgleichungen. Wir begnügen uns hier, aus der Theorie der Integralgleichungen ohne Beweis die folgenden Ergebnisse zu nennen[1]). Von dem reellen nicht identisch verschwindenden Kern $K(x, \xi)$ einer linearen homogenen Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{7·7}$$

wird für $a \leq x,\ \xi \leq b$ vorausgesetzt:

1. er sei symmetrisch, d. h. $K(x, \xi) = K(\xi, x)$,
2. er sei quadratisch integrabel, d. h. es mögen die Integrale

$$\int_a^b K(x,\xi)\,dx, \quad \int_a^b\!\!\int_a^b K(x,\xi)\,dx\,d\xi, \quad \int_a^b K^2(x,\xi)\,dx, \quad \int_a^b\!\!\int_a^b K^2(x,\xi)\,dx\,d\xi$$

existieren und, soweit sie noch von ξ abhängen, beschränkt sein,

3. er besitze eine mittlere Stetigkeit, d. h. es sei für alle x

$$\lim_{x_1 \to x} \int_a^b [K(x,\xi) - K(x_1,\xi)]^2 d\xi = 0\,. \tag{7·8}$$

Wenn $K(x, \xi)$ stetig ist, sind die Voraussetzungen 2 und 3 von selbst erfüllt.

---

[1]) Die Beweise können z. B. nachgelesen werden bei G. HAMEL, Integralgleichungen, Berlin 1937, S. 51—91, und R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Berlin 1931, Bd. I, S. 96—130.

Weiter trifft man die Definitionen:

Eine Zahl λ, für die (7·7) eine nicht identisch verschwindende quadratisch integrable Lösung $\varphi(x)$ besitzt, heißt ein Eigenwert und die betreffende Lösung eine Eigenfunktion. Eine Eigenfunktion φ heißt normiert, wenn $\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1$ ist.

Ferner nennt man eine Funktion $u(x)$ quellenmäßig darstellbar, wenn es eine quadratisch integrable Funktion $v(x)$ gibt, so daß

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi$$

gilt.

Unter den genannten Voraussetzungen gelten folgende Sätze:

Alle Eigenwerte λ von (7·7) sind reell; $\lambda = 0$ ist offenbar kein Eigenwert. Es gibt mindestens einen Eigenwert λ und höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte, die man daher in einer Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ anordnen kann und die im Endlichen keinen Häufungspunkt besitzen; es kann ferner auch die Vielfachheit eines Eigenwertes, welche die Anzahl der zu dem betreffenden Eigenwert gehörigen voneinander linear unabhängigen Eigenfunktionen angibt, nur eine endliche sein. Die Anzahl der Eigenwerte ist bei stetigen Kernen genau dann endlich, wenn der Kern „ausgeartet" ist, d. h. sich als endliche Summe von Produkten je einer Funktion von x und einer Funktion von ξ darstellen läßt:

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^{r} a_k(x) \cdot b_k(\xi) .$$

Zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_k .$$

Die zu einem mehrfachen Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen können orthogonalisiert werden (vgl. 5·9), so daß, wenn man mehrfache Eigenwerte in der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ entsprechend mehrfach zählt, ein zugehöriges System normierter orthogonaler Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, ein sog. „Orthonormalsystem", existiert, für welches gilt

$$(7·9) \qquad \int_a^b \varphi_i\, \varphi_k\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k . \end{cases}$$

Jede quellenmäßig darstellbare Funktion $u(x)$ läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den so normierten und orthogonalisierten Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$ entwickeln:

$$(7·10) \qquad u(x) = \sum_k c_k\, \varphi_k(x) ,$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten c_k durch die Formel

(7·11) $$c_k = \int_a^b u(x)\varphi_k(x)\,dx$$

gegeben sind.

Der „iterierte Kern“ $K_2(x, \xi)$

$$K_2(x,\xi) = \int_a^b K(x,\varrho)K(\varrho,\xi)\,d\varrho$$

läßt sich in die in x und ξ absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln:

$$K_2(x,\xi) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\xi)}{\lambda_k^2},$$

und es gilt

(7·12) $$\int_a^b K_2(x,x)\,dx = \int_a^b\int_a^b [K(x,\xi)]^2\,dx\,d\xi = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}.$$

Ist $K(x, \xi)$ stetig und sind alle Eigenwerte λ_k positiv oder nur endlich viele λ_k negativ, so gilt die absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung (Satz von MERCER):

$$K(x,\xi) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(\xi)}{\lambda_k}$$

und

(7·13) $$\int_a^b K(x,x)\,dx = \sum_k \frac{1}{\lambda_k}.$$

Die zu (7·7) gehörige inhomogene Integralgleichung

(7·14) $$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + f(x)$$

hat, sofern λ kein Eigenwert ist, die eindeutig bestimmte Lösung

(7·15) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \left[K(x,\xi) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}\right] f(\xi)\,d\xi.$$

Hierbei konvergiert die unendliche Reihe gleichmäßig in x und ξ für alle Werte von λ, die keine Eigenwerte sind.

Es gilt ferner der Einschließungssatz[1]: Ist $v(x)$ eine stetige Funktion, liegt die Funktion

(7·16) $$\Phi(x) = \frac{v(x)}{\int_a^b K(x,\xi)v(\xi)\,d\xi}$$

[1] L. COLLATZ, Math. Z. 47 (1941) 395.

zwischen endlichen Grenzen $\Phi_{\min}$ und $\Phi_{\max}$, und hat Φ ein festes Vorzeichen, so schließen $\Phi_{\min}$ und $\Phi_{\max}$ mindestens einen Eigenwert λ_k ein:

$$\Phi_{\min} \leq \lambda_k \leq \Phi_{\max}\,. \tag{7·17}$$

Die Eigenwerte lassen sich durch Variationsprinzipien festlegen. Der n-te positive Eigenwert λ_n (sofern er existiert) ist bestimmt durch

$$\frac{1}{\lambda_n} = \operatorname{Max} \int_a^b\!\!\int_a^b K(x, \xi)\, w(x)\, w(\xi)\, dx\, d\xi\,, \tag{7·18}$$

wobei $w(x)$ den Bereich aller quadratisch integrablen Funktionen durchläuft[1]), die den Nebenbedingungen

$$\int_a^b w^2(x)\, dx = 1\,, \qquad \int_a^b w\varphi_i\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{7·19}$$

genügen; dabei ist φ_i die i-te Eigenfunktion des oben genannten Orthonormalsystems.

7·3. Anwendung auf die Eingliedklasse. Wir wenden nun diese Sätze an auf die aus der Eingliedklasse in 7·1 hervorgegangene Integralgleichung (7·4). Der Kern (7·3) ist reell, stetig, symmetrisch und erfüllt also alle in der beschriebenen Theorie geforderten Voraussetzungen. Die Theorie liefert die Realität der Eigenwerte in Übereinstimmung mit dem Satz in 4·7; die Orthogonalitätsbeziehung (7·9) geht bei Einführung der Eigenfunktionen y_k des Differentialgleichungsproblems mit Hilfe von (7·2) $\varphi_i(x) = \sqrt{g_n(x)}\, y_i^{(n)}(x)$ über in

$$\int_a^b g_n(x)\, y_i^{(n)}(x)\, y_k^{(n)}(x)\, dx = 0 \qquad \text{für} \qquad \lambda_i \neq \lambda_k \tag{7·20}$$

in Übereinstimmung mit (4·15); die Formeln (7·12) und (7·13) besagen, wenn die Zusatzvoraussetzungen (7·5) erfüllt sind,

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} &= \int_a^b \left(\frac{\partial^{2n} G(x,\xi)}{\partial x^n\, \partial \xi^n}\right)_{x=\xi} g_n(x)\, dx\,, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} &= \int_a^b\!\!\int_a^b \left(\frac{\partial^{2n} G(x,\xi)}{\partial x^n\, \partial \xi^n}\right)^2 g_n(x)\, g_n(\xi)\, dx\, d\xi\,, \end{aligned}\right. \tag{7·21}$$

wobei die erste Formel nur dann bewiesen ist, wenn höchstens endlich viele negative λ_k auftreten [vgl. hierzu Gl. (8·2), dann existieren keine negativen Eigenwerte].

---

[1]) (7·18), (7·19) gilt auch, wenn $w(x)$ nur den Bereich der stetigen oder stückweise stetigen Funktionen durchläuft, R. Courant - D. Hilbert, Meth. d. math. Physik, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 104ff.

Bei der Anwendung des Entwicklungssatzes (7·10), (7·11) erhebt sich die Frage, welche Funktionen $u(x)$ quellenmäßig darstellbar sind. Wir machen dazu die in (7·5) getroffenen Voraussetzungen: es mögen unter den Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ die Bedingungen

$$(7{\cdot}22) \qquad y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0$$

vorkommen, es gelte $3n < 2m - 1$ und $\lambda = 0$ sei kein Eigenwert. Es sei nun $w(x)$ eine beliebige Vergleichsfunktion. Durch $M[w] = \varphi(x)$ ist dann eine Funktion $\varphi(x)$ festlegbar, und es gilt nach (5·4)

$$w(x) = \int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

Da $G(x, \xi)$ die Randbedingungen (7·22) erfüllt, erhält man durch n-malige Teilintegration

$$w(x) = \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial \xi^n}\,\Phi(\xi)\,d\xi\,,$$

wobei $\Phi(x)$ eine Funktion ist, die der Gleichung $\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} = (-1)^n \varphi(x)$ genügt. Es ist wieder n-malige Differentiation unter dem Integralzeichen erlaubt:

$$w^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n\, \partial \xi^n}\,\Phi(\xi)\,d\xi\,.$$

Nach (7·3) folgt daher

$$w^{(n)}(x) \cdot \sqrt{g_n(x)} = \int_a^b K(x, \xi)\,\frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{g_n(\xi)}}\,d\xi\,,$$

es ist also die Funktion $u(x) = w^{(n)}(x)\sqrt{g_n(x)}$ mittels der stetigen Funktion $v(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{g_n(\xi)}}$ quellenmäßig dargestellt und daher in eine Reihe nach den Eigenfunktionen (7·2)

$$\varphi_i(x) = \sqrt{g_n(x)}\,y_i^{(n)}(x)$$

entwickelbar:

$$w^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, y_k^{(n)}(x)\,.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig. Durch n-malige gliedweise Integration von a bis x ergibt sich, daß sich jede Vergleichsfunktion in eine Reihe nach den Eigenfunktionen $y_k(x)$ entwickeln läßt [Integrationskonstanten fallen wegen der Randbedingungen (7·22) fort]:

$$(7{\cdot}23) \qquad w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, y_k(x)$$

und daß diese Reihe gliedweise n-mal differenziert werden darf. Der gleiche Entwicklungssatz wird in 10·5 auf anderem Wege (ohne Integralgleichungen) bewiesen; dort ergibt sich, daß die Reihe (7·23) sogar $(m-1)$-mal gliedweise differenziert werden darf.

Trotz der Eleganz und großen Durchsichtigkeit der Integralgleichungsmethoden gehen wir hier nicht weiter auf sie ein, weil sie nur bis zu den Problemen der Eingliedklasse reichen und die allgemeinen Eigenwertprobleme auf die Integrodifferentialgleichungen (7·1) führen, die man mathematisch noch zu wenig beherrscht.

7·4. Integralgleichungen und partielle Differentialgleichungen. Nicht nur bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen (bei denen allerdings die Theorie der Integralgleichungen nicht ganz so weit reicht wie die direkte in § 4, 5, 8, 12 dargestellte Theorie der Differentialgleichungen), sondern namentlich bei partiellen Differentialgleichungen leisten die Integralgleichungen nützliche Dienste. Es ist einer der großen Vorzüge der Integralgleichungstheorie, daß sie genau so für mehrere unabhängige Veränderliche $x, y, \ldots$ gilt wie für nur eine Veränderliche x; z. B. hat man bei zwei unabhängigen Veränderlichen x, y lediglich an Stelle der Integration über das Grundintervall (a, b) jeweils über ein Grundgebiet $\mathfrak{B}$ in der x-y-Ebene zu integrieren. Wir skizzieren die Anwendung auf die spezielle in 6·2 genannte Klasse von Eigenwertproblemen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (6·6)

$M[z] = -(pz_x)_x - (pz_y)_y + qz = \lambda g_0 z$ in dem dortigen Bereich $\mathfrak{B}$ mit der Randbedingung (6·7)

$$\alpha z + \beta z_n = 0 \quad \text{auf dem Rande } \Gamma.$$

Wir nehmen wieder wie in 6·4 an, es existiere eine GREENsche Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$, mit der das Randwertproblem (6·11), (6·7) in der Lösungsformel (6·12) gelöst werden kann. Für eine Eigenfunktion $z(x, y)$ ist (6·11) mit $\varphi = \lambda g_0 z$ erfüllt, dann ergibt die Lösungsformel (6·12)

$$z(x, y) = \lambda \iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) g_0(\xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi\, d\eta .$$

Setzt man also (g_0 war als positiv vorausgesetzt)

$$K(x, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) \cdot \sqrt{g_0(x, y) \cdot g_0(\xi, \eta)} \tag{7·24}$$

und (φ jetzt in anderer Bedeutung als in (6·11))

$$\varphi(x, y) = z(x, y) \sqrt{g_0(x, y)}\,, \tag{7·25}$$

so ist φ Eigenfunktion der homogenen Integralgleichung zweiter Art:

$$\varphi(x, y) = \lambda \iint_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi\, d\eta .$$

Der Kern $K(x, y; \xi, \eta)$ erfüllt nun die in 7·2 genannten Voraussetzungen; er ist reell und symmetrisch, da die GREENsche Funktion nach (6·16) symmetrisch ist. Weiter ist er zwar weder stetig noch beschränkt, weil die GREENsche Funktion eine logarithmische Singularität besitzt, aber er ist quadratisch integrabel, denn wegen der Gestalt (6·15) der GREENschen Funktion kann man schreiben

$$K(x, y; \xi, \eta) = A(x, y; \xi, \eta) \ln r + B(x, y; \xi, \eta) \tag{7·26}$$

mit

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

A und B sind dabei stetige Funktionen, die sogar stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung besitzen, wenn $g_0(x, y)$ sie besitzt.

Bildet man nämlich

$$\iint_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\,,$$

so stört die Singularität bei $x = \xi$, $y = \eta$ nicht. Denn führt man Polar koordinaten ein:

$$x = \xi + \varrho \cos \vartheta\,,$$
$$y = \eta + \varrho \sin \vartheta\,,$$

so wird $dx\,dy = \varrho\, d\varrho\, d\vartheta$, und das über einen kleinen Kreis vom Radius r um den Punkte $x = \xi$, $y = \eta$ erstreckte Integral $\iint K\,dx\,dy$ liefert für hinreichend kleines r einen beliebig kleinen Beitrag, da $r \ln r$ gegen Null strebt für $r \to 0$. Auch $r (\ln r)^2$ strebt gegen Null für $r \to 0$, d. h. alle in der Voraussetzung 2 von 7·2 genannten Integrale existieren und sind beschränkt. Schließlich sieht man leicht, daß der Kern $K(x, y; \xi, \eta)$ eine mittlere Stetigkeit hat. Da die Summe zweier Kerne mit mittlerer Stetigkeit wieder ein Kern mit mittlerer Stetigkeit ist[1]), genügt es, die mittlere Stetigkeit für den Anteil $A(x, y; \xi, \eta) \ln r$ des Kernes K (7·26) zu prüfen. Bei Bildung des Integrals (7·8) schneide man von dem Gebiete $\mathfrak{B}$ einen kleinen Kreis vom Radius r um den Punkt $x = \xi$, $y = \eta$ aus; der Punkt

---

[1]) Besitzen die Kerne $K(x, \xi)$ und $K^*(x, \xi)$ die mittlere Stetigkeit, d. h. ist (7·8) für sie erfüllt, so ist (7·8) auch für den Kern $S(x, \xi) = K + K^*$ erfüllt; denn es ist

$$\lim_{x_1 \to x} \int_a^b [S(x, \xi) - S(x_1, \xi)]^2 d\xi$$
$$= \lim_{x_1 \to x} \Delta + \lim_{x_1 \to x} \Delta^* + 2 \lim_{x_1 \to x} \int_a^b [K(x, \xi) - K(x_1, \xi)]\,[K^*(x, \xi) - K^*(x_1, \xi)]\, d\xi$$

mit

$$\Delta = \int_a^b [K(x, \xi) - K(x_1, \xi)]^2 d\xi; \qquad \Delta^* = \int_a^b [K^*(x, \xi) - K^*(x_1, \xi)]^2 d\xi\,.$$

Nach Voraussetzung gehen Δ und Δ^* gegen Null für $x_1 \to x$, und der dritte Ausdruck auf der rechten Seite kann dem Betrage nach mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung abgeschätzt werden durch $\sqrt{\Delta \cdot \Delta^*}$, geht also ebenfalls gegen Null.

x_1, y_1 liege bereits in diesem Kreisgebiet. Der Beitrag dieses Kreisgebietes geht wieder gegen Null für $r \to 0$, weil $r (\ln r)^2 \to 0$ strebt für $r \to 0$.

Der Kern $K(x, y; \xi, \eta)$ von (7·26) erfüllt mithin alle Voraussetzungen zur Anwendung der Theorie der Integralgleichungen. Damit ist zunächst die Existenz mindestens eines Eigenwertes und die Realität sämtlicher vorhandener Eigenwerte gezeigt. Die Orthogonalitätsbeziehung (7·9) geht wegen (7·25) über in

$$\iint_{\mathfrak{B}} g_0 z_i z_k \, dx \, dy = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_k . \tag{7·27}$$

Der Entwicklungssatz (7·10), (7·11) ergibt die Entwicklung einer beliebigen, der Randbedingung (6·7) genügenden und stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich besitzenden Funktion $u(x, y)$ nach den Eigenfunktionen. Weitere Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen auf partielle Differentialgleichungen werden in 11·2 und 14·1 besprochen.

Auch bei den anderen in 6·5 genannten Typen von Eigenwertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen sind die Singularitäten der Greenschen Funktion und damit des Kernes der zugehörigen Integralgleichung nicht störend, man erkennt leicht die in der Voraussetzung 2 von 7·2 genannten Integrale als existierend und beschränkt. Die Theorie der Integralgleichungen hat somit sehr weitreichende Anwendungsmöglichkeiten; wir gehen jedoch nicht genauer darauf ein, da schon die Frage nach der Existenz der Greenschen Funktion, wie bereits in 6·4 gesagt, über den Rahmen dieses Bändchens hinausgeht.

7·5. Eingliedklasse und Volterrasche Integralgleichungen. Integralgleichungen der Gestalt

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi , \tag{7·28}$$

bei denen also die obere Grenze beim Integral die Veränderliche x ist, heißen Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art, und zwar für $f(x) \not\equiv 0$ inhomogene, für $f(x) \equiv 0$ homogene Gleichungen. Man kann eine beliebige gewöhnliche lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung $L[y] = r(x)$ durch den Ansatz

$$\left\{\begin{aligned} & y^{(k)}(x) = \varphi(x), \qquad y^{(k-1)}(x) = c_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi , \\ & y^{(k-2)}(x) = c_1 + c_0 x + \int_{x_0}^{x} (x - \xi)\varphi(\xi)\, d\xi , \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & y^{(k-p-1)}(x) = \sum_{\varrho=0}^{p} c_{p-\varrho} \frac{x^\varrho}{\varrho!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^p}{p!} \varphi(\xi)\, d\xi \quad (p = 0, 1, \ldots, k-1) \end{aligned}\right. \tag{7·29}$$

mit $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, x_0$ als Konstanten unmittelbar in eine VOLTERRAsche Integralgleichung zweiter Art überführen; wendet man diese Methode auf Eigenwertprobleme

$$M[y] = \lambda N[y] \tag{7·30}$$

an, so tritt der Eigenwert λ im allgemeinen in der VOLTERRAschen Integralgleichung an verschiedenen Stellen und nicht nur einfach als Faktor wie in (7·28) auf.

Man kann bei Problemen der Eingliedklasse jedoch auf eine etwas andere Art eine VOLTERRAsche Integralgleichung aufstellen, bei der der Eigenwert λ genau wie in (7·28) als Faktor beim Integral auftritt und sonst nicht. Die Aufstellung der Integralgleichung knüpft an das Verfahren der Variation der Konstanten zur Gewinnung eines speziellen Integrals der inhomogenen Differentialgleichung

$$M[y] = r(x) \tag{7·31}$$

an. Es sei $z_1, z_2, \ldots, z_k$ ein Fundamentalsystem, also k voneinander unabhängige Lösungen von $M[y] = 0$, und es sei $p_k(x)$ der Koeffizient[1]) der höchsten Ableitung $y^{(k)}(x)$. Eine Lösung von (7·31) setzt man dann bekanntlich[2]) in der Form an:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(x) z_i(x) . \tag{7·32}$$

Führt man $\gamma_i'(x) = C_i(x)$ ein, so werden die $C_i(x)$ aus den Gleichungen bestimmt:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k} z_i(x) C_i(x) = 0 , \\ \sum_{i=1}^{k} z_i'(x) C_i(x) = 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} z_i^{(k-2)}(x) C_i(x) = 0 , \\ \sum_{i=1}^{k} z_i^{(k-1)}(x) C_i(x) = \dfrac{r(x)}{p_k(x)} . \end{array}\right. \tag{7·33}$$

Dieses Gleichungssystem hat eine eindeutig bestimmte Lösung, da die Determinante als WRONSKIsche Determinante des Fundamentalsystems

---

[1]) In (4·5), (4·6) war der Koeffizient der höchsten Ableitung mit $(-1)^m f_m(x)$ bezeichnet worden. Wir schreiben hier $p_k(x)$, weil die Überlegungen dieser Nummer nicht nur für die selbstadjungierten Ausdrücke der Form (4·5), (4·6), sondern sogar für die Differentialausdrücke der Form (5·1) gelten.

[2]) Vgl. z. B. J. HORN, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Aufl. Berlin u. Leipzig 1927, S. 67ff.

$z_i(x)$ nicht verschwindet. Zufolge dieser Gleichungen folgt durch fortgesetzte Differentiation aus (7·32)

$$(7{\cdot}34)\qquad \begin{cases} y^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(x) z_i^{(s)}(x) & (s = 1, 2, \ldots, k-1) \\ y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(z) z_i^{(\kappa)}(x) + \dfrac{r(x)}{p_k(x)} \end{cases}$$

und beim Einsetzen des Ansatzes (7·32) in die Differentialgleichung (7·31) ergibt sich wegen $M[z_i] = 0$ sofort $M[y] = r(x)$, d. h. $y(x)$ ist ein Integral von (7·31). Bezeichnet man die Lösung des Gleichungssystems (7·33) im Falle $r = 1$ mit $D_i(x)$, so ist $C_i(x) = r(x) D_i(x)$, wobei $D_i(x)$ von $r(x)$ unabhängig ist. Man kann daher die allgemeine Lösung von (7·31) in der Gestalt schreiben:

$$(7{\cdot}35)\qquad y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(x) + \sum_{i=1}^{k} z_i(x) \int_a^x D_i(\xi) r(\xi) d\xi .$$

Dabei sind die $c_1, c_2, \ldots, c_k$ willkürliche Konstanten.

Man darf in den Gleichungen (7·33), abgesehen von der letzten Gleichung, die $C_i(x)$ durch die $D_i(x)$ ersetzen. Die Gleichungen stimmen dann überein mit den in (5·9), (5·10) für die Größen $b_i(x)$ aufgestellten Gleichungen. Man schließt daher, genau wie im Zusatz von 5·3, durch fortgesetztes Differenzieren[1]) der Gleichungen (7·33) auf

$$(7{\cdot}36)\qquad \sum_{i=1}^{k} z_i^{(\mu)}(x) \cdot D_i^{(\nu)}(x) = 0 \quad \text{für} \quad \mu + \nu \leq k - 2 .$$

Wir wenden nun die Lösungsformel (7·35) an auf eine Eigenwertgleichung der Eingliedklasse oder etwas allgemeiner auf eine Gleichung der Gestalt

$$(7{\cdot}37)\qquad M[y] = \lambda [g(x) y^{(p)}]^{(q)},$$

mit $p + q \leq k - 2$, wobei $g(x)$ sowohl p-mal als auch q-mal stetig differenzierbar sei.

Es folgt als allgemeine Lösung dieser Gleichung:

$$(7{\cdot}38)\qquad y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(x) + \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^{k} z_i(x) D_i(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q)} d\xi .$$

Bei Teilintegration lautet das Integral der rechten Seite

$$\left[\sum_{i=1}^{k} z_i(x) D_i(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q-1)}\right]_{\xi=a}^{\xi=x} - \int_a^x \sum_{i=1}^{k} z_i(x) D_i'(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q-1)} d\xi.$$

---

[1]) Hier wird gebraucht, daß die $D_i(\xi)$ stetige Ableitungen bis zur $(k-2)$-ten Ordnung besitzen. Es ist dazu wörtlich dasselbe wie in Fußnote 1, S. 79 über die $b_i(\xi)$ zu sagen.

Der Randausdruck verschwindet für $\xi = x$ wegen (7·36) und ist für $\xi = a$ eine Linearkombination aus den $z_i(x)$, kann also zur ersten Summe in (7·38) hinzugeschlagen werden. Somit ist, wenn wir für die neuen Konstanten $c_{i,1}$ schreiben,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_{i,1} z_i(x) - \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^{k} z_i(x) D_i'(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q-1)} d\xi .$$

Durch weitere $q - 1$ Teilintegrationen folgt genau so

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_{i,q} z_i(x) + (-1)^q \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^{k} z_i(x) D_i^{(q)}(\xi) g(\xi) y^{(p)}(\xi) d\xi.$$

Unter Beachtung, daß nach (7·36)

$$\sum_{i=1}^{k} z_i [D_i^{(q)} g]' = g \sum_{i=1}^{k} z_i D_i^{(q+1)} + g' \sum_{i=1}^{k} z_i D_i^{(q)} = 0$$

ist und ebenso

$$\sum_{i=1}^{k} z_i [D_i^{(q)} g]'' = 0$$

usw., folgt durch nochmalige p Teilintegrationen, wenn wir die Konstanten wieder einfach mit c_i bezeichnen, für $y(x)$ die inhomogene VOLTERRAsche Integralgleichung zweiter Art:

$$(7\cdot39) \quad y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i(x) + (-1)^{p+q} \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^{k} z_i(x) [D_i^{(q)}(\xi) g(\xi)]^{(p)} y(\xi) d\xi .$$

Eine solche Integralgleichung läßt sich auf folgende Weise behandeln, was hier als ein (übrigens leicht beweisbares) Ergebnis aus der Theorie ohne Beweis angegeben sei[1]). Bei beschränktem stetigem Kern K, etwa

$$|K(x, \xi)| \leq C \qquad \text{für} \qquad a \leq \xi \leq x \leq b ,$$

existiert die Lösung $\varphi(x)$ der inhomogenen Gleichung (7·28); sie ist durch (7·28) eindeutig festgelegt und kann nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen gefunden werden: Ist $y_0(x)$ eine willkürliche integrable Funktion, so konvergieren die durch

$$(7\cdot40) \qquad y_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi) y_n(\xi) d\xi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

festgelegten Funktionen $y_n(x)$ im Intervall a, b gleichmäßig gegen die Lösung $\varphi(x)$.

Bei der vorgelegten Gleichung (7·39) ist die Lage etwas anders, denn die Konstanten c_i und λ sind noch unbekannt. Man kann trotzdem das durch (7·40) gegebene Verfahren der schrittweisen Näherungen verwenden, und

---

[1]) G. HAMEL, Integralgleichungen, Berlin 1937, S. 32.

zwar in folgender Weise (wobei allerdings über die Konvergenz des Verfahrens keine Aussagen gemacht werden): Man geht von einer willkürlich gewählten, die vorgegebenen Randbedingungen nach Möglichkeit bereits erfüllenden Funktion $y_0(x)$ aus und bestimmt die bei der Berechnung weiterer $y_{n+1}(x)$ noch frei wählbaren Konstanten c_i und die Größe λ, die man dann als Näherungswert für einen Eigenwert ansieht, derart, daß y_{n+1} die Randbedingungen erfüllt und von gleicher Größenordnung wie y_n wird. Ein Faktor ist ja bei y_{n+1} noch frei, und man benutzt dann irgendeine Normierungsbedingung, wie etwa $y_n(x_0) = y_{n+1}(x_0)$ oder $y'_n(x_0) = y'_{n+1}(x_0)$. Für Einzelheiten vgl. das folgende Beispiel.

7·6. Beispiel. Die Biegeschwingungen eines einseitig eingespannten, am anderen Ende freien Stabes von konstantem Querschnitt und der Länge $l = 1$ führen nach 2·3 (Abb. 2·5, Nr. 1) auf das Eigenwertproblem

$$y^{\mathrm{IV}} = \lambda y; \qquad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0\,.$$

Nach (7·29) mit $k = 4$, $p = 3$ kann man sofort eine zugehörige VOLTERRAsche Integralgleichung anschreiben:

$$y(x) = \sum_{\varrho=0}^{3} c_\varrho x^\varrho + \lambda \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{3!}\, y(\xi)\, d\xi\,.$$

Die Randbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ verlangen $c_0 = c_1 = 0$, die anderen beiden Randbedingungen lassen sich nicht ohne weiteres in den c_2, c_3 ausdrücken.

Zur Lösung der Integralgleichung nach dem Iterationsverfahren der Gleichung (7·40) gehen wir von einer alle Randbedingungen erfüllenden Funktion $y_0(x)$ aus:

$$y_0(x) = 6x^2 - 4x^3 + x^4,$$

und erhalten

$$y_1(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \lambda\left(\frac{x^6}{60} - \frac{x^7}{210} + \frac{x^8}{1680}\right).$$

Der Faktor von λ kann hierbei durch viermalige Integration von $y_0(x)$ unmittelbar hingeschrieben werden, z. B wird aus $6x^2$:

$$\frac{6x^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{x^6}{60}\,.$$

Nun soll $y_1(x)$ ebenfalls die Randbedingungen erfüllen. Ein noch freier Faktor bei $y_1(x)$ wird nach der Vorschrift am Schlusse von 7·5 so festgelegt, daß y_0 und y_1 von gleicher Größenordnung sind; am einfachsten fordert man $y_0(1) = y_1(1)$. Aus den drei Gleichungen

$$y_1''(1) = 2c_2 + 6c_3 + \frac{\lambda}{3} = 0, \qquad y_1'''(1) = 6c_3 + \frac{6\lambda}{5} = 0,$$

$$y_0(1) - y_1(1) = 3 - c_2 - c_3 - \frac{\lambda}{80} = 0$$

erhält man

$$c_2 = \frac{312}{59}, \qquad c_3 = -\frac{144}{59}, \qquad \lambda = \frac{720}{59} = 12{,}2034$$

an Stelle des exakten Wertes $\lambda = 12{,}362$.

Einen besseren Näherungswert erhält man bei Ausführung eines weiteren Iterationsschrittes. Da ein konstanter Faktor bei y_1 frei ist, setzen wir unter Fortlassen des Faktors $\frac{24}{59}$

$$y_1(x) = 13x^2 - 6x^3 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{56}.$$

Dann wird

$$y_2(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{\lambda}{45}\left(\frac{13x^6}{8} - \frac{9x^7}{28} + \frac{x^{10}}{224} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 112} + \frac{x^{12}}{112 \cdot 132}\right).$$

Aus den drei linearen Gleichungen $y_2''(1) = y_2'''(1) = y_1(1) - y_2(1) = 0$ erhält man für die Unbekannten c_2, c_3, λ die Werte

$$c_2 = \frac{661}{630}\lambda, \quad c_3 = -\frac{13}{27}\lambda, \quad \lambda = \frac{148680}{12031} = 12{,}3581 \text{ (Fehler } -0{,}03\%)\,[1].$$

7·7. Asymptotische Verteilung der Eigenwerte. Mit Hilfe einer VOLTERRAschen Integralgleichung (7·51) läßt sich die asymptotische Verteilung der Eigenwerte bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y \tag{7·41}$$

und den STURMschen Randbedingungen

$$\begin{cases} c_1 y'(a) + c_2 y(a) = 0 \\ c_3 y'(b) + c_4 y(b) = 0 \end{cases} \tag{7·42}$$

bestimmen [2]). Es sei $f_1 > 0$, $g_0 > 0$, f_1, f_0, g_0 stetig, f_1 und g_0 zweimal stetig differenzierbar. Es wird zunächst die Differentialgleichung (7·41) durch Einführung neuer Veränderlicher auf eine einfachere Gestalt gebracht durch eine auch bei anderen Untersuchungen oft mit Vorteil benutzte Transformation. Es wird durch

$$z = z(x) = \frac{1}{K}\int_a^x \sqrt{\frac{g_0}{f_1}}\,dx \tag{7·43}$$

eine neue unabhängige Veränderliche z und durch

$$u = \Theta \cdot y \quad \text{mit} \quad \Theta = (g_0 f_1)^{\frac{1}{4}} \tag{7·44}$$

eine neue abhängige Veränderliche u eingeführt. K ist eine später noch festzulegende Konstante. Diese Transformation wird hier der Kürze halber fertig angegeben, sie ließe sich natürlich auch mit beliebigen Funktionen Θ und $z(x)$ durchrechnen; aus der Forderung, daß die Differentialgleichung die einfache Bauart (7·45) erhalten soll, könnte man dann Θ und $z(x)$ ermitteln.

---

[1]) Der „Fehler“ einer Näherung ξ für die „wahre Größe“ x wird in der Literatur leider verschieden eingeführt, als $\xi - x$, $x - \xi$ oder $|\xi - x|$. Wir definieren ihn hier im Anschluß an F. Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. I, Leipzig u. Berlin 1943, S. 12 als $\xi - x$, so daß also gilt: Näherungswert = wahrer Wert + Fehler und: wahrer Wert = Näherungswert + „Berichtigung“. Prozentuale Fehlerangaben beziehen sich auf Prozente des wahren Wertes.

[2]) E. L. INCE, Ordinary Differential Equations, London 1927, S. 270—273.

Aus (7·43) und (7·44) folgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{K}\left(\frac{g_0}{f_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{K}\frac{\Theta^2}{f_1}$$

und

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz}\left(\frac{u}{\Theta}\right)\frac{dz}{dx} = \left[\frac{1}{\Theta}\frac{du}{dz} - \frac{u}{\Theta^2}\frac{d\Theta}{dz}\right]\frac{1}{K}\frac{\Theta^2}{f_1} = \frac{1}{Kf_1}\left[\frac{du}{dz}\Theta - u\frac{d\Theta}{dz}\right]$$

$$(f_1 y')' = \frac{1}{K}\frac{d}{dz}\left[\frac{du}{dz}\Theta - u\frac{d\Theta}{dz}\right]\frac{dz}{dx} = \frac{1}{K^2}\left[\frac{d^2u}{dz^2}\Theta - u\frac{d^2\Theta}{dz^2}\right]\frac{\Theta^2}{f_1}.$$

Die Differentialgleichung (7·41) geht damit über in

$$\text{(7·45)} \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + [\Lambda^2 - q(z)]u = 0$$

mit

$$\Lambda^2 = K^2\lambda; \; q(z) = \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{dz^2} + K^2\frac{f_0}{g_0}.$$

Die Konstante K hängt mit der Länge des neuen Grundintervalls zusammen; diese wird gleich π für

$$\text{(7·46)} \qquad K = \frac{1}{\pi}\int_a^b \sqrt{\frac{g_0}{f_1}}\,dz.$$

Die Randbedingungen (7·42) gehen in die entsprechend gebauten

$$\text{(7·47)} \qquad \begin{cases} c_1^*\left(\frac{du}{dz}\right)_0 + c_2^* u(0) = 0, \\ c_3^*\left(\frac{du}{dz}\right)_\pi + c_4^* u(\pi) = 0 \end{cases}$$

über. Es sei zunächst $c_1^* \neq 0$; $c_3^* \neq 0$; dann läßt sich (7·47) in der Form

$$\text{(7·48)} \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)_0 - hu(0) = 0$$

$$\text{(7·49)} \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)_\pi + Hu(\pi) = 0$$

schreiben. Ein noch freier Faktor bei $u(z)$ kann durch die Anfangsbedingungen

$$\text{(7·50)} \qquad u(0) = 1, \quad \left(\frac{du}{dz}\right)_0 = h$$

festgelegt werden[1]), dann ist (7·48) erfüllt. Die Lösung von (7·45) läßt sich nun nach dem in 7·5 beschriebenen Verfahren der Variation der Konstanten sofort angeben. Setzt man in (7·31) $M[y] = \frac{d^2u}{dz^2} + \Lambda^2 u$; $r(z) = q(z)\cdot u(z)$, und als Fundamentalsystem $u_1 = \cos\Lambda z$, $u_2 = \sin\Lambda z$, so liefert die Lösungsformel (7·35)

$$u(z) = A\cos\Lambda z + B\sin\Lambda z + \frac{1}{\Lambda}\int_0^z \sin(\Lambda(z-t))\,q(t)\,u(t)\,dt.$$

---

[1]) $u(0)$ kann nicht $= 0$ sein, da sonst nach (7·48) auch $u'(0) = 0$ und damit $u(x) \equiv 0$ wäre als Lösung von (7·45) mit den Anfangsbedingungen $u = u' = 0$.

Daß diese Funktion tatsächlich die Differentialgleichung (7·45) erfüllt, bestätigt man leicht durch Einsetzen in (7·45). Die Integrationskonstanten A, B ergeben sich aus den Anfangsbedingungen (7·50) zu $A = 1$, $B = \frac{h}{\Lambda}$. Somit lautet die VOLTERRASche Integralgleichung für $u(z)$

$$(7{\cdot}51)\qquad u(z) = \cos\Lambda z + \frac{h}{\Lambda}\sin\Lambda z + \frac{1}{\Lambda}\int_0^z \sin\left(\Lambda(z-t)\right) q(t)\,u(t)\,dt\,.$$

Die Lösung $u(z)$ des Anfangswertproblems (7·45), (7·50) ist im Intervall $0 \leq z \leq \pi$ bei gegebenem Λ eindeutig festgelegt und stetig; es sei M der Maximalbetrag von $u(z)$ in diesem Intervall, der an der Stelle $z = z_1$ angenommen werde. Dann folgt mit

$$Q = \int_0^\pi |q(t)|\,dt$$

durch Abschätzung des Integrals in (7·51) für M die Ungleichung

$$|u(z_1)| = M \leq \left|\cos\Lambda z_1 + \frac{h}{\Lambda}\sin\Lambda z_1\right| + \frac{M}{|\Lambda|}Q\,.$$

Die Funktion $\cos\Lambda z + \frac{h}{\Lambda}\sin\Lambda z$ stellt in z eine Schwingung mit der Amplitude

$$\sqrt{1+\frac{h^2}{\Lambda^2}}$$

dar; man hat daher

$$M \leq \sqrt{1+\frac{h^2}{\Lambda^2}} + \frac{MQ}{|\Lambda|}$$

oder

$$M \leq \frac{\sqrt{1+\frac{h^2}{\Lambda^2}}}{1-\frac{Q}{|\Lambda|}} \quad \text{für} \quad |\Lambda| > Q\,.$$

M ist also für alle $|\Lambda| > Q$ und damit überhaupt für alle reellen Λ beschränkt:

$$M \leq M_1\,.$$

M_1 und im folgenden $M_2, M_3, \ldots$ bedeuten von Λ unabhängige Konstanten. Damit folgt aus (7·51)

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_\pi = -\Lambda\sin\Lambda\pi + a_2 \quad \text{mit} \quad |a_2| \leq M_2;$$

wegen $|u(\pi)| \leq M_1$ ergibt die zweite Randbedingung (7·49)

$$(7{\cdot}52)\qquad \sin\Lambda\pi = \frac{a_3}{\Lambda} \quad \text{mit} \quad |a_3| \leq M_3\,.$$

Die Nullstellen $\Lambda = \Lambda_n$ dieser transzendenten Gleichung, die zugleich die Eigenwerte von (7·45), (7·47) sind, unterscheiden sich für große Λ beliebig wenig von den Nullstellen der Gleichung $\sin\Lambda\pi = 0$; man

sieht leicht (Abb. 7·1, die Kurve für $\frac{a_3}{\Lambda}$ muß in dem schraffierten Gebiet verlaufen)

$$\Lambda = n + \frac{a_4}{n} \quad \text{mit} \quad |a_4| \leqq M_4;$$

es ist hiermit noch nicht bewiesen, daß die Zahl $n + \frac{a_4}{n}$ gerade der n-te Eigenwert Λ_n ist, es könnte auch z. B. der $(n + 1)$-te oder $(n - 1)$-te Eigenwert sein, oder es könnten auch mehrere Nullstellen von (7·52) bei n liegen. (Die letztgenannte Möglichkeit läßt sich allerdings für große n ausschließen, indem man zeigt, daß die Steigung von $\frac{a_3}{\Lambda}$ beliebig klein wird für $\Lambda \to \infty$.)

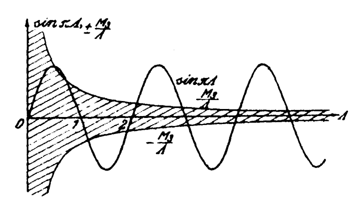


Abb. 7·1. Zur asymptotischen Verteilung der Eigenwerte.

Im bisher ausgeschlossenen Fall, daß c_1^* oder c_3^* verschwinden, liefern die entsprechenden Überlegungen[1]):

$$\text{für } c_1^* = c_3^* = 0: \Lambda = n + \frac{a_5}{n}$$
$$\text{mit} \quad |a_5| \leqq M_5$$

und wenn genau eines der beiden c^* verschwindet:

$$\Lambda = n + \frac{1}{2} + \frac{a_6}{n} \quad \text{mit} \quad |a_6| \leqq M_6 .$$

Die Größen a_i lassen sich formelmäßig angeben und abschätzen, man kann dadurch genauere asymptotische Formeln aufstellen[2]).

Setzt man mit $\Lambda^2 = K^2 \lambda$ für K den Wert (7·46) ein, so erhält man zusammenfassend den

Satz: *Es sei λ_n der n-te Eigenwert des Problems* (7·41), (7·42) *mit den eingangs über f_1, f_0, g_0 getroffenen Voraussetzungen. Dann gilt das Gesetz der asymptotischen Verteilung der Eigenwerte*

$$(7·53) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \left(\frac{\pi}{\int\limits_a^b \sqrt{\frac{g_0}{f_1}}\, dx} \right)^2$$

Die Größenordnung der Eigenwerte hängt also gar nicht von den in den Randbedingungen (7·42) auftretenden Koeffizienten c_ν ab.

7·8. Vermischte Übungsaufgaben zum zweiten Kapitel. 1. Weitere Beispiele für nicht normale Eigenwertverteilungen. Man löse folgende nicht selbstadjungierte Eigenwertprobleme (Aufstellung aller Eigenwerte λ_k mit den zugehörigen Eigenfunktionen y_k):

---

1) Vgl. E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, S. 213.

2) E. L. Ince, a. a. O.

a) $y'' = \lambda y'$; $y(0) = y(l) = 0$.
b) $-y'' = \lambda y$; $y(0) = y'(0) = 0$.
c) $-y'' = \lambda y$; $y(0) = y'(1) - \lambda y'(0) = 0$.
d) $y^{IV} = -\lambda y''$; $y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.
e) $y^{IV} = -\lambda y''$; $y''(0) = y'''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

Lösungen:

a) Nur komplexe Eigenwerte vorhanden: $\lambda_k = \frac{2k\pi i}{l}$; $y_k = e^{\lambda_k x} - 1$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots)$.

b) Kein Eigenwert vorhanden.

c) Mit $\lambda = k^2$ erhält man für k die transzendente Gleichung $\cos k = k^2$; sie hat im Reellen zwei sich nur durch das Vorzeichen unterscheidende und außerdem unendlich viele komplexe (und nicht rein imaginäre) Wurzeln; es gibt also einen reellen positiven Eigenwert und unendlich viele komplexe Eigenwerte. Der positive Eigenwert ist $\lambda = 0{,}6792$.

Bei den Randbedingungen $y(0) = y'(1) - \lambda a y'(0) = 0$ lautet die transzendente Gleichung $\cos k = a k^2$, und man kann dann bei Vorgabe einer beliebigen ganzen positiven Zahl r durch passende Wahl der Konstanten a erreichen, daß genau r reelle Eigenwerte vorhanden sind.

d) Nur ein einfacher Eigenwert vorhanden: $\lambda_1 = 0$, mit $y_1 = x$.

e) Nur ein Eigenwert vorhanden, der doppelt zählt: $\lambda_{1,2} = 0$ mit $y_1 = 1$, $y_2 = x$.

2. Man konstruiere die GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ zu dem Randwertproblem

$$L[y] = y^{IV} + k^2 y'' = r(x)$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

Dies ist zugleich ein Beispiel für eine GREENsche Resolvente, wenn man $k^2 = \lambda$ setzt. Zur Kontrolle berechne man

$$\int_0^1 G(x, \xi) d\xi = h(x)$$

und überzeuge sich, daß $h(x)$ das Randwertproblem für $r = 1$ löst.

Ausrechnung nach dem in 5·3 angegebenen Verfahren:

Ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$ bilden die Funktionen

$$z_1 = 1, \quad z_2 = x, \quad z_3 = \sin kx, \quad z_4 = \cos kx.$$

Die Gleichungen (5·9), (5·10) für die b_i lauten hier

$$\begin{aligned} b_1 + b_2\xi + b_3 \sin k\xi \quad + \quad b_4 \cos k\xi &= 0 \\ b_2 + k b_3 \cos k\xi - k b_4 \sin k\xi &= 0, \\ -k^2 b_3 \sin k\xi - k^2 b_4 \cos k\xi &= 0, \\ -k^3 b_3 \cos k\xi + k^3 b_4 \sin k\xi &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

und haben die Lösung

$$b_1 = \frac{\xi}{2k^2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2k^2}, \quad b_3 = \frac{1}{2k^3}\cos k\xi, \quad b_4 = -\frac{1}{2k^3}\sin k\xi.$$

Jetzt ist noch das Gleichungssystem (5·12) für die a_i aufzulösen. Es lautet

$$\begin{aligned}
&a_1 + b_1 + a_4 + b_4 = 0,\\
&a_2 + b_2 + k(a_3 + b_3) = 0,\\
&a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + (a_3 - b_3)\sin k + (a_4 - b_4)\cos k = 0,\\
&a_2 - b_2 + k(a_3 - b_3)\cos k - k(a_4 - b_4)\sin k = 0
\end{aligned}$$

und hat nur eine Lösung, wenn die Determinante

$$D = k(2 - 2\cos k - k\sin k) \neq 0$$

ist. Der Kürze halber schreiben wir $\sin k = s$ und $\cos k = c$. Dann ergeben sich für die a_i die Werte

$$\begin{aligned}
Da_1 &= b_1 k^2 s + 2b_2(s - kc) + 2b_3 k(s - kc) + 2b_4 k(ks + c - 1),\\
Da_2 &= -2b_1 k^2 s - b_2 k^2 s + 2b_3 k^2(c - 1) - 2b_4 k^2 s,\\
Da_3 &= 2b_1 ks + 2b_2(ks + c - 1) + b_3 k^2 s + 2b_4 ks,\\
Da_4 &= 2b_1 k(c - 1) + 2b_2(kc - s) + 2b_3 k(kc - s) - b_4 k^2 s.
\end{aligned}$$

Die GREENsche Funktion kann nun mit Hilfe der a_i und b_i nach (5·8) unmittelbar angegeben werden. Setzt man in den a_i die Werte für die b_i ein, so erhält man nach Ordnen und Zusammenfassen der Glieder

$$\left.\begin{aligned}
k^2 DG(x,\xi) = {} & (kx - \sin kx)[-s(k\xi - \sin k\xi) + (c - 1)(1 + \cos k\xi) + ks]\\
& + (1 - \cos kx)[(1 - c)(k\xi + \sin k\xi) + (kc - s)(1 - \cos k\xi) - ks\sin k\xi]
\end{aligned}\right\}\text{für } x \leq \xi;$$

für $x \geq \xi$ erhält man $G(x, \xi)$ aus der Symmetrieformel $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Zur Kontrolle berechnet man

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_0^1 G(x, \xi)\,d\xi\\
&= \int_0^x + \int_x^1 = \frac{1}{2k^3 D}[kDx^2 + k(k + kc - 2s)(1 - \cos kx) - D(kx - \sin kx)].
\end{aligned}$$

Diese Funktion löst tatsächlich das Randwertproblem für $r = 1$.

3. Man bestimme die GREENsche Funktion $G(x, \xi)$ zu der Aufgabe

$$L[y] = y^{\mathrm{VI}} = r(x),$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = 0.$$

Ergebnis:

$$G(x, \xi) = \frac{x^3(\xi - 1)^3}{120}[10\xi^2 - 5x\xi(3\xi + 1) + x^2(6\xi^2 + 3\xi + 1)]$$

für $x \leq \xi$; für $x \geq \xi$ erhält man $G(x, \xi)$ durch Vertauschung von x und ξ.

4. Eigenwerte beliebig hoher Vielfachheit.

Ist $k > 0$ beliebig ganzzahlig vorgegeben, so kann man einen Eigenwert λ_j der selbstadjungierten definiten Aufgabe

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\lambda z,$$

$z = 0$ auf dem Rande eines Quadrates der Seitenlänge π, angeben, der eine Vielfachheit von mindestens k besitzt.

Beweis: Sind die Seiten des Quadrates durch die Gleichungen $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \pi$ gegeben, so gehören die Eigenfunktionen

$$z = \sin mx \cdot \sin ny$$

mit ganzzahligem m, n zum Eigenwert $\lambda = \lambda_{m,n} = m^2 + n^2$.

Nun benutzt man k voneinander verschiedene Punkte $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_k, y_k$ mit rationalen Koordinaten auf dem ersten Oktanten des Einheitskreises, also

$$x_i^2 + y_i^2 = 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$
$$0 < y_i < x_i.$$

Denkt man sich sämtliche $2k$ Brüche $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$ auf den gemeinsamen Hauptnenner R gebracht, so gehören zum Eigenwert $\lambda = R^2$ die k voneinander linear unabhängigen Eigenfunktionen

$$z = \sin(R x_i x) \cdot \sin(R y_i y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

5. Zweifacher Eigenwert: Der kleinste Eigenwert von

$$y^{\mathrm{IV}} + \frac{9\pi^4}{l^4} y = -\lambda y''$$
$$y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$$

ist ein doppelter. Welche Eigenfunktionen gehören zu ihm?

Antwort: Zum Eigenwert

$$\lambda = \frac{10\pi^2}{l^2}$$

gehören

$$y_1 = 3\sin\frac{\pi x}{l} - \sin\frac{3\pi x}{l} \qquad \text{und} \qquad y_2 = \cos\frac{\pi x}{l} - \cos\frac{3\pi x}{l}.$$

6. Nimmt in dem Eigenwertproblem $-y'' = \lambda g_0(x) y$; $y(a) = y(b) = 0$ die stetige Funktion $g_0(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ sowohl positive als auch negative Werte an, so existieren unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte (Siehe Fußnote 3) von S. 57). Man rechne als geschlossen auswertbares Beispiel den Fall [in welchem allerdings die Voraussetzung der Stetigkeit von $g_0(x)$ verletzt ist]

$$a = -1, \quad b = 1, \quad g_0(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

durch.

Ergebnis: Sind $\mu_1, \mu_2, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg}\mu + \mathfrak{Tg}\,\mu = 0$ ($\mu_1 = 2{,}3650$, $\mu_2 = 5{,}4978$, F. Emde, Tafeln elementarer Funktionen 1940, S. 131), so sind die Eigenwerte λ_i durch $\pm\mu_i^2$ mit $i = 1, 2, \ldots$ und die zugehörigen Eigenfunktionen durch

$$y_i(x) = \begin{cases} \sin\sqrt{\lambda_i}\,\mathfrak{Sin}(\sqrt{\lambda_i}(x+1)) & \text{für} \quad x < 0 \\ \mathfrak{Sin}\sqrt{\lambda_i}\,\sin(\sqrt{\lambda_i}(1-x)) & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

gegeben.

Abb. 7·2 zeigt die zu den ersten drei positiven und den ersten drei negativen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen.

7. Man gebe bei den Randbedingungen $y(-1) = y(1) = 0$ die erste Eigenfunktion $y_1(x)$ und den ersten Eigenwert λ_1 an für die Differentialgleichung

a) $-y'' = \lambda(10 - x^2)y$,

b) $-y'' = \lambda\dfrac{y}{5 - x^2}$,

c) $-y'' = \lambda\dfrac{x^2 y}{3 + 3x^2 - x^4}$,

d) $-y'' = \lambda\dfrac{(1 + 5x^2)y}{4 + x^2 - x^4}$.

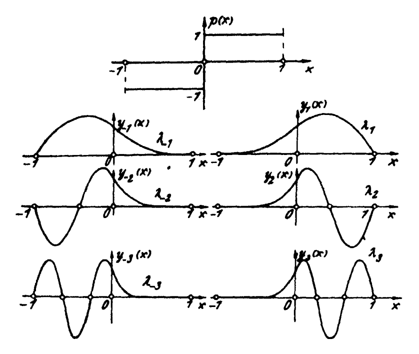


Abb. 7·2. Zu $-y'' = \lambda\cdot(\operatorname{sgn} x)\, y$; $y(\pm 1) = 0$ gehören unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte.

Lösungen:

a) $y_1 = e^{-\frac{x^2}{4}}(1 - x^2)$; $\lambda_1 = \frac{1}{4}$,

b) $y_1 = (5 - 6x^2 + x^4)$; $\lambda_1 = 12$.

c) $y_1 = 3 - 5x^4 + 2x^6$; $\lambda_1 = 60$.

d) $y_1 = 4 - 3x^2 - 2x^4 + x^6$; $\lambda_1 = 6$.

8. Es seien

$$\pm x_1, \quad \pm x_2, \quad \pm x_3, \ldots, \pm x_n, \ldots$$

die nach der Größe des absoluten Betrages geordneten Wurzeln der Gleichung

a) $x \cdot \operatorname{tg} x = A$;

b) $\operatorname{tg} x + A x = 0$.

Man berechne für $A > 0$ die Summe der reziproken Quadrate

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i^2}.$$

Lösung: Es sind $x_i^2 = \lambda_i$ die Eigenwerte des Problems $-y'' = \lambda y$ mit den Randbedingungen

a) $y'(0) = 0, \quad y'(1) + A y(1) = 0$;

b) $y(0) = 0, \quad A y'(1) + y(1) = 0$.

Da man zu diesen Problemen die Greensche Funktion angeben kann (vgl. Tafel IV), liefert Gl. (7·13) bzw. (7·21) unmittelbar als Summe der reziproken Quadrate der Wurzeln

bei a)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i^2} = \int_0^1 \frac{A + 1 - A x}{A}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{A},$$

bei b)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i^2} = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{A+1}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(A+1)}.$$

In Tafel VI findet man als Beispiele die Ergebnisse für einige Werte von A.

9. Man rechne folgende Beispiele[1]) von Eigenwertaufgaben nach, bei denen zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen sich beliebig wenig voneinander unterscheiden. Es sei ε eine frei, insbesondere beliebig klein wählbare Konstante. Die selbstadjungierte Aufgabe

$$-y'' = \lambda \frac{\varepsilon \sin x}{1 + \varepsilon \sin x} y, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

[1]) Die beiden Beispiele nannte mir Herr H. Wielandt.

hat für $\lambda_1 = 0$ die Eigenfunktion $y_1 \equiv 1$ und für $\lambda_2 = 1$ die Eigenfunktion $y_2 = 1 + \varepsilon \sin x$. Das Problem gehört nicht in die von uns in § 4 betrachtete Problemklasse; denn die Funktion g_0 wechselt im Intervall $0 < x < 2\pi$ das Vorzeichen und verletzt die in 4·2 gemachte Voraussetzung $g_n \neq 0$.

Das Problem

$$y^{\mathrm{IV}} + y = -\lambda(g_1 y')'$$

mit den Randbedingungen der Periodizität $y^{(\nu)}(0) = y^{(\nu)}(2\pi)$ für $\nu = 0, 1, 2, 3$ hat bei der komplexwertigen Funktion $g_1 = 34 - \frac{9}{\varepsilon} e^{-ix}$ für $\lambda_1 = \frac{1}{17}$ die Eigenfunktion $y_1 = e^{ix}$ und für $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ die Eigenfunktion $y_2 = e^{ix} + \varepsilon e^{2ix}$

10. Stelle dem System[1]) von Differentialgleichungen erster Ordnung für zwei Funktionen $y(x)$, $z(x)$

$$\frac{dy}{dx} = b(x)y + \lambda c(x)z$$
$$\frac{dz}{dx} = -\lambda a(x)y - b(x)z$$

durch Elimination von z eine Differentialgleichung 2. Ordnung für y gegenüber. Ergebnis: Man erhält mit $\lambda^2 = \mu$ für y die Differentialgleichung in der selbstadjungierten Form (4·5), (4·6)

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{c}\right) + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{c}\right) + \frac{b^2}{c}\right) y = \mu a y .$$

3. Kapitel.

Kurzer Abriß der mathematischen Theorie.

In § 8 werden Minimaleigenschaften der Eigenwerte bewiesen. Diese Eigenschaften sind die Grundlage für die in § 9 und in den Kapiteln IV und V dargestellten numerischen Verfahren. § 10 gibt einen Beweis für den Entwicklungssatz, der zur Zeit noch nicht in gleicher Allgemeinheit bewiesen worden ist wie die Minimaleigenschaften, aber doch schon bis zur Eingliedklasse reicht. Der Beweis dieses Entwicklungssatzes setzt vom Leser etwas mehr Mathematik voraus als die vorhergehenden Paragraphen, wurde aber wegen der zentralen Stellung des Entwicklungssatzes möglichst

---

[1]) Eine weitreichende Eigenwerttheorie, ausgehend von dem sog. kanonischen System

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n} (b_{ji}(x)\, y_j + \lambda c_{ij}(x)\, z_i) \\ \frac{dz_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n} (-\lambda a_{ij}(x) y_j - b_{ij}(x) z_j) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n)$$

findet man bei E. HÖLDER, Math. Ann. 119 (1943) 21—66.

vollständig gebracht. Seine Aussage ist auch dem Nichtmathematiker verständlich.

Für die häufig auftretende spezielle Klasse von Eigenwertproblemen zweiter Ordnung

$$-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y; \quad y(a) = y(b) = 0$$

wird unabhängig von den übrigen Untersuchungen dieses Kapitels ein elementarer Beweis der wichtigsten Tatsachen in 11·1 gegeben.

§ 8. Minimaleigenschaften der Eigenwerte.

8·1. Die Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes. Bei der Untersuchung der Definitheit begegnete uns in Gleichung (4·25) der RAYLEIGHsche Quotient

$$(8 \cdot 1) \qquad R[u] = \frac{\int_a^b u M[u] dx}{\int_a^b u N[u] dx}.$$

Diese Zahl $R[u]$ kann, sofern der Nenner nicht verschwindet, gebildet werden für beliebige Vergleichsfunktionen u, d. h. (vgl. 4·2) für Funktionen $u \not\equiv 0$, die $2m$-mal stetig differenzierbar sind und die Randbedingungen erfüllen.

Wir machen die Voraussetzungen:

Das Eigenwertproblem (4·5) bis (4·8):

$$M[y] - \lambda N[y] = 0,$$
$$U_\mu[y] = 0$$

sei selbstadjungiert (vgl. 4·3) und volldefinit, d. h. es gelte nach (4·24)

$$(8 \cdot 2) \qquad \begin{cases} \int_a^b u M[u] dx > 0 \\ \int_a^b u N[u] dx > 0 \end{cases} \quad \text{für alle Vergleichsfunktionen } u.$$

Das Nachprüfen dieser Voraussetzungen ist in jedem Einzelfalle nach den Methoden des § 4 leicht möglich.

Dann gilt, wie in 8·2 bewiesen werden soll:

$$(8 \cdot 3) \qquad R[u] \geq \lambda_1,$$

d. h. der mit einer Vergleichsfunktion u gebildete RAYLEIGHsche Quotient $R[u]$ ist stets größer oder gleich dem kleinsten Eigenwert λ_1. Verwendet man als u die erste Eigenfunktion y_1, so ist $R[y_1] = \lambda_1$. Es besteht also der

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5), (4·8) *sei selbstadjungiert, und die Bedingungen* (8·2) *der Volldefinitheit seien erfüllt. Dann löst die erste Eigenfunktion* y_1 *die Variationsaufgabe, den Rayleighschen Quotienten* (8·1) *zum Minimum zu machen, wenn* u *den Bereich aller Vergleichsfunktionen durchläuft. Der zugehörige Minimumwert ist der erste Eigenwert* λ_1.

8·2. Durchführung des Beweises. Es sei jetzt u eine fest gewählte Vergleichsfunktion. Mit dieser Funktion u denken wir uns $R[u]$ gebildet, dieses R ist dann also eine feste Zahl.

Zum Beweis der Behauptung (8·3) wird eine Hilfsfunktion $\eta(x)$ gebildet, indem man in der Differentialgleichung u für y und R für λ einsetzt:

$$M[u] - RN[u] = \eta(x)\,. \tag{8·4}$$

Wenn die gewählte Funktion u mit einer Eigenfunktion y_i übereinstimmt, ist $R = \lambda_i$ und $\eta(x) \equiv 0$. Stimmt u nahezu mit y_i überein, so wird eine „Fehlerfunktion" $\eta(x)$ auftreten, die nur kleine Werte annimmt. Umgekehrt gilt: wenn $\eta(x) \equiv 0$ ist, so ist u eine Lösung von

$$M[u] - RN[u] = 0\,,$$

d. h. u ist eine Eigenfunktion mit R als zugehörigem Eigenwert. In diesem Fall ist $R \geqq \lambda_1$ sicher richtig. Daher kann der Fall $\eta \equiv 0$ jetzt ausgeschlossen werden.

Mit dem fest gewählten u ist auch $\eta(x)$ eine feste stetige Funktion. Nun wird folgendes Randwertproblem gebildet:

$$\begin{cases} M[v] - \lambda N[v] = \eta(x)\,, \\ U_\mu[v] = 0\,, \end{cases} \tag{8·5}$$

wobei λ ein von Null an wachsender Parameter ist. Das ist also ein inhomogenes Randwertproblem mit gegebener rechter Seite $\eta(x)$. Die Lösung v hängt noch von dem Parameter λ ab, $v = v(x, \lambda)$, und läßt sich für solche λ, die nicht Eigenwerte sind, mit Hilfe der Greenschen Resolvente nach (5·20), (5·21) sofort angeben:

$$v(x, \lambda) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda)\eta(\xi)\,d\xi\,. \tag{8·6}$$

Nach 5·8 ist die Greensche Resolvente in λ eine meromorphe Funktion; sie hat an den Stellen der Eigenwerte $\lambda = \lambda_i$ Pole und ist sonst regulär. Daher ist auch $v(x, \lambda)$ in λ stetig und regulär außer höchstens an den Stellen $\lambda = \lambda_i$. Nun wird noch eine weitere Hilfsfunktion gebildet:

$$h(\lambda) = \int_a^b \eta(x)v(x, \lambda)\,dx\,. \tag{8·7}$$

Diese Funktion wird eingeführt, weil sie sich bei Benutzung von (8·5) in der Gestalt schreiben läßt:

$$(8{\cdot}8)\qquad h(\lambda) = \int_a^b \bigl(v(x,\lambda)\, M[v(x,\lambda)] - \lambda v(x,\lambda)\, N[v(x,\lambda)]\bigr)\, dx\,.$$

Man sieht, daß hier gerade die in den Voraussetzungen benutzten Bildungen $\int_a^b vM[v]dx$ und $\int_a^b vN[v]dx$ auftreten. Mit $v(x,\lambda)$ ist auch $h(\lambda)$ in λ stetig und regulär, außer an den Stellen der Eigenwerte $\lambda = \lambda_i$. Wir veranschaulichen uns die Funktion $h(\lambda)$, indem wir sie für einige spezielle Werte ausrechnen.

1. $\lambda = R$: In diesem Falle geht die Differentialgleichung (8·5) für v in die Differentialgleichung (8·4) für $u(x)$ über, und die Randbedingungen sind auch genau die von u geforderten, d. h. es ist

$$v(x, R) = u(x)$$

und nach (8·8)

$$h(R) = \int_a^b (uM[u] - RuN[u])\,dx = \int_a^b uM[u]\,dx - R\int_a^b uN[u]\,dx = 0\,,$$

da R nach (8·1) gerade als Quotient der beiden Integrale definiert war. Wir stellen also fest: $h(R) = 0$.

2. $\lambda = 0$. Wegen der Volldefinitheit ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert, also diese Wahl möglich. Hier ist $v(x, 0)$ nach (8·5) die Lösung des Randwertproblems

$$M[v] = \eta(x)\,,$$
$$U_\mu[v] = 0\,.$$

Mit der dadurch festgelegten Funktion wird nach der Voraussetzung (8·2)

$$h(0) = \int_a^b vM[v]\,dx > 0\,.$$

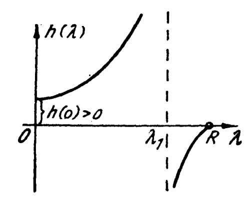


Abb. 8·1. Graphische Darstellung der Hilfsfunktion $h(\lambda)$.

Nun beweisen wir noch, daß $\frac{dh}{d\lambda}$ überall positiv ist. Dann folgt, daß $h(\lambda)$ ein Aussehen wie in Abb. 8·1 haben muß: $h(\lambda)$ hat für $\lambda = 0$ einen positiven Wert, für $\lambda = R$ den Wert 0; $h(\lambda)$ ist überall stetig und differenzierbar, außer an den Eigenwertstellen $\lambda = \lambda_i$; $h(\lambda)$ hat überall (außer bei $\lambda = \lambda_i$) ein positives Steigungsmaß. Würde zwischen 0 und R kein Eigenwert liegen, so müßte demnach $h(R) > h(0)$

sein, was nicht der Fall ist. Es folgt daher, daß zwischen 0 und R mindestens ein Eigenwert liegt, also $R \geq \lambda_1$.

Zum Nachweis der positiven Ableitung wird die Differenz zweier Funktionswerte h an den Stellen λ und λ^* ausgerechnet. Es ist nach (8·7):

$$h(\lambda) - h(\lambda^*) = \int_a^b \{v(x,\lambda)\eta(x) - v(x,\lambda^*)\eta(x)\}\, dx\,.$$

Im Integranden wird für $\eta(x)$ das erstemal

$$\eta(x) = M[v(x,\lambda^*)] - \lambda^* N[v(x,\lambda^*)]$$

und das zweitemal

$$\eta(x) = M[v(x,\lambda)] - \lambda N[v(x,\lambda)]$$

eingesetzt (nach der Definition (8·5) von v ist beides ja gleich der gegebenen Funktion $\eta(x)$). Dann folgt

$$h(\lambda) - h(\lambda^*) = \int_a^b \{v(x,\lambda) M[v(x,\lambda^*)] - v(x,\lambda^*) M[v(x,\lambda)]$$
$$- \lambda^* v(x,\lambda) N[v(x,\lambda^*)] + \lambda v(x,\lambda^*) N[v(x,\lambda)]\}\, dx$$

Auf der rechten Seite heben sich die ersten beiden Summanden bei der Integration wegen der vorausgesetzten Selbstadjungiertheit auf, und die Integrale über die letzten beiden Summanden sind, abgesehen von den Faktoren λ, einander gleich, wieder wegen der Selbstadjungiertheit. Also ist

$$(8·9)\qquad h(\lambda) - h(\lambda^*) = (\lambda - \lambda^*) \int_a^b v(x,\lambda)\, N[v(x,\lambda^*)]\, dx\,.$$

Damit folgt in der Grenze für $\lambda^* \to \lambda$ wegen der Voraussetzung (8·2)

$$(8·10)\qquad \frac{dh}{d\lambda} = \lim_{\lambda^* \to \lambda} \frac{h(\lambda) - h(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} = \int_a^b v(x,\lambda) N[v(x,\lambda)]\, dx > 0\,.$$

Damit ist der Beweis für $R \geq \lambda_1$ abgeschlossen. Zugleich ist hiermit die Existenz von mindestens einem Eigenwert gezeigt.

8·3. Minimaleigenschaften der höheren Eigenwerte[1]. Auch der zweite Eigenwert λ_2 läßt sich durch ein Variationsproblem festlegen, und zwar wird sich zeigen, daß er der kleinste Wert ist, den der RAYLEIGHsche Quotient annehmen kann, wenn man jetzt u nicht mehr den Bereich aller Vergleichsfunktionen durchlaufen läßt, sondern nur noch den Bereich derjenigen Ver-

[1] Wir beweisen den am Schluß dieser Nummer genannten Satz für die Minimaleigenschaft des $(s+1)$-ten Eigenwertes λ_{s+1} unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s+1}$ einfache Eigenwerte sind. Der Satz gilt jedoch auch für mehrfache Eigenwerte und ist hier auch für den Fall mehrfacher Eigenwerte formuliert; die Beweise für den Fall mehrfacher Eigenwerte findet man bei E. KAMKE, Math. Z. 46 (1940) 251—286.

gleichsfunktionen, die zur ersten Eigenfunktion y_1 im verallgemeinerten Sinne orthogonal (oder zu $N[y_1]$ im gewöhnlichen Sinne orthogonal) sind.

Wir gehen von einer Funktion u aus, die als Vergleichsfunktion dieselben Bedingungen wie in 8·1 erfüllt und die darüber hinaus noch der „Nebenbedingung" genügt:

$$\int_a^b u(x) \cdot N[y_1(x)]\,dx = 0 . \tag{8·11}$$

$u(x)$ darf also jetzt nicht eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion sein. Die Existenz einer solchen Funktion $u(x)$ steht außer Frage. Ist nämlich $v(x)$ irgendeine Vergleichsfunktion, die nur nicht eine erste Eigenfunktion y_1 sein darf, so braucht man nur

$$u(x) = v(x) - y_1(x) \frac{\int_a^b v(\xi) N[y_1(\xi)]\,d\xi}{\int_a^b y_1(\xi) N[y_1(\xi)]\,d\xi}$$

zu setzen, dann ist (8·11) erfüllt.

Zum Beweis der Minimaleigenschaft des zweiten Eigenwertes denken wir uns wieder $u(x)$ als fest gewählte Funktion, dann ist auch der RAYLEIGHsche Quotient $R[u]$ eine feste Zahl. Wir bilden wie bei (8·4) die Hilfsfunktion $\eta(x)$ nach

$$M[u] - RN[u] = \eta(x) . \tag{8·12}$$

Ist $\eta(x) \equiv 0$, so ist $u(x)$ selbst eine Eigenfunktion, und da es nicht die erste Eigenfunktion sein kann, ist u dann gleich der zweiten oder einer höheren Eigenfunktion; dann ist also $R \geqq \lambda_2$ richtig. Es genügt daher, die Behauptung $R \geqq \lambda_2$ unter der Voraussetzung $\eta(x) \not\equiv 0$ zu beweisen.

Entsprechend zu (8·5) werden die Randwertprobleme

$$M[v] - \lambda N[v] = \eta(x) ,$$
$$U_\mu[v] = 0$$

gebildet, deren Lösung $v = v(x, \lambda)$ sich mit Hilfe der GREENschen Resolvente unmittelbar angeben läßt:

$$v(x, \lambda) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, \eta(\xi)\, d\xi .$$

Nun hat die GREENsche Resolvente bei $\lambda = \lambda_1$ einen Pol und läßt sich nach (5·26) in der Gestalt schreiben:

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{C_1 y_1(x) y_1(\xi)}{\lambda - \lambda_1} + G_1^*(x, \xi, \lambda) ,$$

wobei $G_1^*(x, \xi, \lambda)$ an der Stelle $\lambda = \lambda_1$ regulär ist. Daher wird

$$v(x, \lambda) = \int_a^b \frac{C_1 y_1(x) y_1(\xi)}{\lambda - \lambda_1}\, \eta(\xi) d\xi + \int_a^b G_1^*(x, \xi, \lambda) \eta(\xi)\, d\xi .$$

Hier verschwindet das erste Integral; denn aus der Voraussetzung, daß u zu $N[y_1]$ orthogonal ist, folgt wegen der Selbstadjungiertheit

$$\int_a^b u N[y_1]\, dx = \int_a^b y_1 N[u]\, dx = 0 .$$

Ferner ist

$$\int_a^b u N[y_1]\, dx = \int_a^b u \cdot \frac{M[y_1]}{\lambda_1} dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b y_1 M[u] dx = 0 .$$

Es ist also

$$\int_a^b y_1 M[u]\, dx = \int_a^b y_1 N[u]\, dx = 0 ,$$

und damit ist nach (8·12)

$$\int_a^b y_1(\xi)\eta(\xi)\, d\xi = 0 .$$

Es bleibt also

$$v(x, \lambda) = \int_a^b G_1^*(x, \xi, \lambda)\eta(\xi)\, d\xi . \tag{8·13}$$

Die Singularität für $\lambda = \lambda_1$ ist damit herausgefallen, und es kann $v(x, \lambda)$ durch diese Gleichung auch für $\lambda = \lambda_1$ definiert werden. $v(x, \lambda)$ ist bei $\lambda = \lambda_1$ regulär und nur bei den höheren Eigenwerten λ_i singulär. Der weitere Beweis verläuft genau wie in 8·2. Die wie in (8·7) gebildete Hilfsfunktion

$$h(\lambda) = \int_a^b \eta(x) v(x, \lambda)\, dx$$

hat für $\lambda = R$ und $\lambda = \lambda_1$ die speziellen Werte:

$$h(R) = 0 ,$$

und
$$h(\lambda_1) = \int_a^b \{v(x, \lambda_1) \cdot M[v(x, \lambda_1)] - \lambda_1 v(x, \lambda_1) N[v(x, \lambda_1)]\}\, dx$$

$$= \int_a^b v(x, \lambda_1) N[v(x, \lambda_1)]\, dx \cdot \{R[v(x, \lambda_1)] - \lambda_1\} .$$

Hier sind beide Faktoren positiv[1]), der erste nach der Voraussetzung (8·2), der zweite wegen der bereits bewiesenen Minimaleigenschaft des ersten Eigenwertes λ_1, also ist $h(\lambda_1) > 0$.

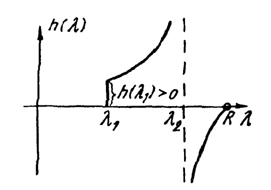


Abb. 8·2. Zum Beweise der Minimaleigenschaft des zweiten Eigenwertes.

[1]) Hierbei wird benutzt, daß $v(x, \lambda)$ auch für $\lambda = \lambda_1$ eine Vergleichsfunktion ist, was sich aus (8·13) beweisen läßt. Wegen einer ausführlichen Darstellung siehe Fußnote 1) von S. 129.

Ferner hat $h(\lambda)$ genau wie in (8·10) eine positive Ableitung und damit ein Aussehen wie in Abb. 8·2. Es kann also $h(\lambda)$ nicht für alle λ aus dem Intervall $\lambda_1 \leq \lambda \leq R$ regulär sein, d. h. es liegt ein weiterer Eigenwert in diesem Intervall. Damit ist $R \geq \lambda_2$ und zugleich die Existenz eines zweiten Eigenwertes bewiesen.

Allgemein beweist man ganz genau so:

Erfüllt die Vergleichsfunktion u die s Nebenbedingungen

$$(8{\cdot}14) \qquad \int_a^b u N[y_i(x)]\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

so ist $R[u] \geq \lambda_{s+1}$.

Da für $u = y_{s+1}$ der RAYLEIGHsche Quotient den Wert λ_{s+1} annimmt, ist dann für den Eigenwert λ_{s+1} die Minimaleigenschaft bewiesen:

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5), (4·8) *sei selbstadjungiert, und die Bedingungen* (8·2) *der Volldefinitheit seien erfüllt. Dann existieren unendlich viele reelle positive Eigenwerte* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *Der* $(s+1)$*-te Eigenwert ist gleich dem Minimum, das der Rayleighsche Quotient* (8·1) *annehmen kann, wenn* u *den Bereich aller derjenigen Vergleichsfunktionen durchläuft, die zu den ersten* s *Eigenfunktionen im verallgemeinerten Sinne orthogonal sind [d. h. die Nebenbedingungen* (8·14) *erfüllen]; dabei sind mehrfache Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach zu zählen.*

Zugleich folgt, daß die Eigenwerte λ_s unbeschränkt anwachsen:

$$\lambda_s \to \infty \quad \text{für} \quad s \to \infty,$$

denn nach 5·7 können die Eigenwerte λ im Endlichen keinen Häufungspunkt besitzen.

8 4. Courants[1]) **Maximum-Minimum-Prinzip.** Bei der in 8·3 besprochenen Minimaleigenschaft des $(s+1)$-ten Eigenwertes treten in den Nebenbedingungen (8·14) die s ersten Eigenfunktionen auf. Im folgenden wird der Eigenwert λ_{s+1} durch eine Minimaleigenschaft auf „independente" Weise festgelegt, bei der nicht auf die niedrigeren Eigenfunktionen zurückgegriffen wird. Man nehme s voneinander linear unabhängige integrierbare Funktionen

$$w_1, w_2, \ldots, w_s$$

und betrachte nur diejenigen Vergleichsfunktionen u, die zu diesen s gewählten Funktionen im gewöhnlichen Sinne orthogonal sind, die also die

---

[1]) R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 352.

Nebenbedingungen

(8·15) $$\int_a^b u w_\sigma\, dx = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

erfüllen.

Das Minimum[1]) des RAYLEIGHschen Quotienten (8·1) für die jetzt nur noch zugelassenen Vergleichsfunktionen u hat einen Wert, der noch von den gewählten Funktionen w_σ abhängt:

$$\underset{u}{\mathrm{Min}}\, R[u] = M(w_1, w_2, \ldots, w_s)\,.$$

Dann ist der Eigenwert λ_{s+1} das Maximum dieser Funktion $M(w_1, w_2, \ldots, w_s)$, wenn die w_σ die Gesamtheit der integrierbaren Funktionen durchlaufen:

(8·16) $$\lambda_{s+1} = \mathrm{Max}\, M(w_1, w_2, \ldots, w_s)\,.$$

Zusammenfassend wird also behauptet:

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5), (4·8) *sei selbstadjungiert und volldefinit (d. h.* (8·2) *sei erfüllt). Es sei $M(w_1, w_2, \ldots, w_s)$ das Minimum oder die untere Grenze des Rayleighschen Quotienten* (8.1), *wenn u den Bereich aller Vergleichsfunktionen durchläuft, die zu s gegebenen voneinander linear unabhängigen integrierbaren Funktionen $w_1, w_2, \ldots, w_s$ orthogonal sind. Dann ist der* $(s+1)$*-te Eigenwert λ_{s+1} gleich dem größten Wert, den $M(w_1, \ldots, w_s)$ annehmen kann, wenn die w_σ die Gesamtheit aller betrachteten Funktionensysteme durchlaufen.*

Beweis: Es seien zunächst $w_1, w_2, \ldots, w_s$ fest gewählte Funktionen. Wir zeigen, daß es eine zulässige Vergleichsfunktion gibt (die also zu allen w_σ orthogonal ist), die sich aus den ersten $(s+1)$ Eigenfunktionen y_σ linear zusammensetzen läßt:

(8·17) $$u = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma \cdot y_\sigma\,.$$

Die Bedingung der Orthogonalität verlangt nämlich:

$$0 = \int_a^b u w_\varrho\, dx = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma \int_a^b w_\varrho y_\sigma\, dx \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Das sind s lineare homogene Bedingungen für $s+1$ Konstanten a_σ, also stets erfüllbar durch Werte a_σ, die nicht alle 0 sind.

Für die mit diesen a_σ nach (8·17) gebildete Funktion u wird mit Benutzung von (4·12) bzw. (5·33)

$$\int_a^b u M[u]\, dx = \int_a^b \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma y_\sigma \sum_{\tau=1}^{s+1} a_\tau M[y_\tau]\, dx$$
$$= \int_a^b \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma y_\sigma \sum_{\tau=1}^{s+1} a_\tau \lambda_\tau N[y_\tau]\, dx\,.$$

[1]) Oder die untere Grenze. Es kann bei einem Variationsproblem vorkommen, daß die untere Grenze von keiner Vergleichsfunktion angenommen wird.

Wegen der verallgemeinerten Orthogonalität der Eigenfunktionen bleiben von dem Integral nur die Glieder mit $\sigma = \tau$ übrig:

$$\int_a^b u M[u] dx = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma^2 \lambda_\sigma \int_a^b y_\sigma N[y_\sigma] dx$$

und entsprechend

$$\int_a^b u N[u] dx = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma^2 \int_a^b y_\sigma N[y_\sigma] dx .$$

Die rechts auftretenden Integrale sind nach der Voraussetzung (8·2) positiv, also kann man wegen $\lambda_\sigma \leq \lambda_{s+1}$ abschätzen:

$$\int_a^b u M[u] dx \leq \lambda_{s+1} \int_a^b u N[u] dx$$

und damit

$$R[u] \leq \lambda_{s+1} .$$

Das gesuchte Minimum von R kann höchstens noch kleiner sein als das so aufgestellte $R[u]$, es gilt also erst recht

$$\text{Min } R \leq \lambda_{s+1} .$$

Damit ist bewiesen

$$M(w_1, w_2, \ldots, w_s) \leq \lambda_{s+1} .$$

Nun werden die $w_1, w_2, \ldots, w_s$ variiert: Wählen wir speziell

$$w_\sigma = N[y_\sigma] ,$$

so haben wir das frühere Minimumproblem für die höheren Eigenwerte vor uns, und es wird dann $M = \lambda_{s+1}$. Es ist also λ_{s+1} das Maximum von M bei Variieren der w_σ oder in einer symbolischen Formel ausgedrückt.

$$(8\cdot18) \qquad \lambda_{s+1} = \underset{(w_1, \ldots, w_s)}{\text{Max}} \left\{ \begin{array}{c} \underset{u}{\text{Min}}\, R[u] \\ \text{Nebenbedingung (8·15)} \end{array} \right\}$$

8·5. Der Vergleichungssatz. Er ist eine unmittelbare Folge aus dem Maximum-Minimum-Prinzip und lautet:

Satz: *Liegen die beiden selbstadjungierten Eigenwertprobleme der Form* (4·5), (4·8) *vor*:

$$(8\cdot19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} M[y] = \lambda N[y] \\ M[y] = \lambda^* N^*[y] \end{array} \right.$$

bei demselben $M[y]$ *mit den gleichen Randbedingungen* $U_\mu[y] = 0$, *und gilt für alle Vergleichsfunktionen* u

$$\int_a^b u M[u]\, dx > 0 ,$$

$$(8\cdot20) \qquad \int_a^b u N[u]\, dx \geq \int_a^b u N^*[u]\, dx > 0 ,$$

so gilt für die Eigenwerte λ_s *und* λ_s^* *der beiden Probleme* (8·19)

$$\lambda_s \leq \lambda_s^* \text{ für } s = 1, 2, \ldots$$

Denn wegen der Voraussetzungen (8·20) gilt

$$R[u] \leq R^*[u],$$

und daher besteht dieselbe Ungleichung auch für alle Minima und für deren Maximum, d. h. $\lambda_s \leq \lambda_s^*$ für alle s.

Den Vergleichungssatz kann man oft zur schnellen Abschätzung der Eigenwerte benutzen. Hat man z. B. das Problem

$$y^{\mathrm{IV}} = \lambda(1 + x) \cdot y$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0,$$

so nehmen wir als Vergleichsprobleme die selbstadjungierten volldefiniten Probleme mit denselben Randbedingungen

$$y^{\mathrm{IV}} = \lambda^* y,$$
$$y^{\mathrm{IV}} = 2\lambda^{**} y.$$

Es ist

$$\int_0^1 u \cdot (1 + x) u \, dx = \int_0^1 (1 + x) u^2 \, dx \geq \int_0^1 u^2 \, dx.$$

Also ist der Vergleichungssatz anwendbar und sagt aus:

$$\lambda_s^* \geq \lambda_s,$$

ebenso $\lambda_s \geq \lambda_s^{**}$. Nun haben die Vergleichsprobleme die sofort angebbaren Lösungen (die Differentialgleichungen haben konstante Koeffizienten)

$$y_n = \sin n\pi x$$

mit

$$\lambda_n^* = (n\pi)^4; \qquad \lambda_n^{**} = \frac{(n\pi)^4}{2},$$

also hat man alle Eigenwerte durch

$$\frac{(n\pi)^4}{2} \leq \lambda_n \leq (n\pi)^4$$

in Schranken eingeschlossen.

§ 9. Der Einschließungssatz.

9·1. Formulierung des Satzes. Eine weitere Anwendung des Maximum-Minimum-Prinzips von 8·4 stellt der Einschließungssatz dar; er bezieht sich auf Probleme der Eingliedklasse mit der Differentialgleichung (4·22)

(9·1) $$M[y] = \lambda N[y] = (-1)^n \lambda [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$$

und den Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ nach (4·8).

Allerdings müssen noch etwas schärfere Voraussetzungen als in 4·7 gemacht werden. Der Satz lautet:

Satz (Einschließungssatz): *Ein Problem der Eingliedklasse* (9·1), (4·8) *erfülle die Voraussetzungen*:

a) es ist selbstadjungiert,

b) für jede Vergleichsfunktion ist $\int\limits_a^b u\, M[u]\, dx > 0$,

c) die Funktion $g_n(x)$ *hat im Grundintervall* a, b *ein festes Vorzeichen,*

d) für zwei beliebige Vergleichsfunktionen u, v *und für jede* n*-mal stetig differenzierbare Funktion* $g(x)$ *gilt*

$$(-1)^n \int\limits_a^b u\, [g v^{(n)}]^{(n)}\, dx = \int\limits_a^b g u^{(n)} v^{(n)}\, dx .$$

Hat man eine Vergleichsfunktion F_1 *und eine* $2n$*-mal stetig differenzierbare Funktion* F_0, *welche die Beziehung*

$$M[F_1] = N[F_0] \tag{9·2}$$

erfüllen, bleibt ferner die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{F_0^{(n)}(x)}{F_1^{(n)}(x)} \tag{9·3}$$

im Intervall a, b *zwischen endlichen Grenzen und wechselt dort das Vorzeichen nicht, so liegt zwischen dem Maximum und Minimum der Funktion* Φ *mindestens ein Eigenwert des Problems* (9·1), (4·8):

$$\Phi_{\min} \leq \lambda_s \leq \Phi_{\max} . \tag{9·4}$$

Ist z. B. F_0 gleich einer Eigenfunktion y_i, so ist wegen (9·2) $F_1 = \frac{1}{\lambda_i} F_0$, und für den Quotienten Φ erhält man nach (9·3) $\Phi = \lambda_i =$ const. Ist nun F_0 etwas von y_i verschieden, so wird $\Phi(x)$ im Intervall a, b nicht mehr konstant sein, vgl. Abb. 9·1, aber es bleibt stets mindestens ein Eigenwert zwischen dem Kleinst- und Größtwert von Φ eingeschlossen.

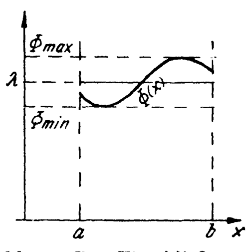


Abb. 9·1. Zum Einschließungssatz.

Die Voraussetzung d) läßt sich in jedem Einzelfalle leicht durch Teilintegration nachprüfen und verlangt von den Randbedingungen, daß die bei der Teilintegration auftretenden Randausdrücke verschwinden. Die in Tafel I genannten Probleme der Eingliedklasse erfüllen sämtlich die hier geforderten schärferen Voraussetzungen.

Nach dem Satz aus 8·3 haben alle Eigenwerte λ_s und damit nach dem Einschließungssatz auch Φ dasselbe Vorzeichen wie die Funktion $g_n(x)$.

Bei den speziellen Eigenwertproblemen ($n = 0$) lassen sich die Bedingungen für F_0 und F_1 etwas einfacher formulieren[1][2]. Es genügt dann, von irgendeiner Vergleichsfunktion F_1 auszugehen und

$$F_0 = \frac{1}{g_0(x)} M[F_1] \tag{9·5}$$

zu setzen. Hiermit wird

$$\Phi(x) = \frac{F_0}{F_1} = \frac{M[F_1]}{g_0 F_1} = \frac{M[F_1]}{N[F_1]}, \tag{9·6}$$

und es gilt

$$\left(\frac{M[F_1]}{g_0 F_1}\right)_{\min} \leq \lambda_s \leq \left(\frac{M[F_1]}{g_0 F_1}\right)_{\max} \tag{9·7}$$

Die Funktion F_0 braucht die Randbedingungen nicht zu erfüllen, man wird aber doch versuchen, die Funktionen F_0 und F_1 so zu wählen, daß F_0 möglichst viele Randbedingungen erfüllt, damit sie dem Verlauf einer Eigenfunktion nahekommt und die Schranken (9·4) nicht zu grob ausfallen.

9·2. Beispiel zum Einschließungssatz. Bevor wir den Beweis für den Einschließungssatz führen, betrachten wir ein einfaches Beispiel der speziellen Problemklasse (Abb. 9·2):

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \\ y(0) = y'(1) = 0. \end{cases} \tag{9·8}$$

Zur Aufstellung zweier Funktionen F_0, F_1, die alle gestellten Bedingungen erfüllen, setzen wir F_1 als Polynom an, das bereits bei beliebigen Werten von c_1 und c_2 die Randbedingungen erfüllt:

$$F_1 = x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + x(-4 - 3c_1 - 2c_2).$$

Abb. 9·2. Erste Eigenfunktion des Problems (9·8).

Dann wird nach (9·5)

$$F_0 = -F_1'' = -12x^2 - 6c_1 x - 2c_2.$$

Nun soll F_0 zur Erzielung besserer Ergebnisse ebenfalls die Randbedingungen erfüllen, also $c_2 = 0$, $c_1 = -4$; somit ist

$$F_0 = 12(2x - x^2), \quad F_1 = 8x - 4x^3 + x^4.$$

Es wird

$$\Phi = \frac{F_0}{F_1} = \frac{12x(2-x)}{8x - 4x^3 + x^4} = \frac{12}{4 + 2x - x^2} = \frac{12}{5 - (1-x)^2}.$$

Man sieht hier direkt (Abb. 9·3), daß $\Phi_{\max} = 3$, $\Phi_{\min} = 2{,}4$ im Intervall (0,1) ist, also hat man die Schranken $2{,}4 \leq \lambda_s \leq 3$.

---

[1]) Für die speziellen Eigenwertprobleme wurde der Einschließungssatz für den ersten Eigenwert λ_1 bewiesen von G. Temple, Proc. Lond. math. Soc. (2) 29 (1929) 257—280.

[2]) Eine Abschätzung für sämtliche Eigenwerte nach oben und nach unten für die (in λ nicht notwendig lineare) Differentialgleichung $-y'' = Q(x, \lambda) \cdot y$ mit den Sturmschen Randbedingungen wird in einer demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinenden Arbeit von Herrn W. Quade gegeben.

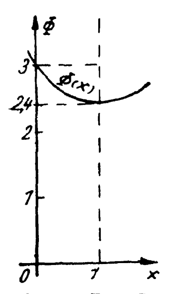


Abb. 9·3. Zum Einschließungssatz für das Beispiel (9·8).

Will man engere Schranken für λ_s berechnen[1]) (damit greifen wir dem nächsten Kapitel voraus und geben bereits die Vorschrift für das Verfahren der schrittweisen Näherungen), so kann man weitere Funktionen $F_2, F_3, \ldots$ aus

$$M[F_{n+1}] = N[F_n], \quad U_\mu[F_{n+1}] = 0$$

berechnen, also hier aus

$$-F''_{n+1} = F_n, \quad F_{n+1}(0) = F'_{n+1}(1) = 0.$$

Durch direkte zweimalige Integration der Polynome und Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Randbedingungen erhält man:

$$F_2 = \frac{1}{30}(96x - 40x^3 + 6x^5 - x^6)$$
$$= \frac{x(2-x)}{30}(48 + 24x - 8x^2 - 4x^3 + x^4)$$

$$F_3 = \frac{1}{210}\left(272x - 112x^3 + 14x^5 - x^7 + \frac{x^8}{8}\right)$$
$$= \frac{x(2-x)}{1680}(1088 + 544x - 176x^2 - 88x^3 + 12x^4 + 6x^5 - x^6).$$

Die Quotienten $\Phi_n = \dfrac{F_{n-1}}{F_n}$ lauten bei Benutzung der Abkürzung $2x - x^2 = \varrho = 4\nu$

$$\Phi_2 = \frac{30(4+\varrho)}{48 + 12\varrho + \varrho^2} = \frac{15(1+\nu)}{2(3 + 3\nu + \nu^2)}$$

mit

$$\Phi_{\min} = \Phi_2(1) = \frac{150}{61} = 2{,}4590$$

$$\Phi_{\max} = \Phi_2(0) = \frac{5}{2} = 2{,}5,$$

man weiß also jetzt bereits $2{,}459 \leq \lambda_s \leq 2{,}5$. Weiter wird

$$\Phi_3 = \frac{56(48 + 12\varrho + \varrho^2)}{1088 + 272x + 24\varrho^2 + \varrho^3} = \frac{14(3 + 3\nu + \nu^2)}{17 + 17\nu + 6\nu^2 + \nu^3}$$

mit

$$\Phi_{\min} = \Phi_3(1) = \frac{3416}{1385} = 2{,}4664$$

$$\Phi_{\max} = \Phi_3(0) = \frac{42}{17} = 2{,}4706.$$

Man weiß also jetzt $2{,}4664 \leq \lambda_s \leq 2{,}4706$.

Diese Genauigkeit wird bei vielen technischen Problemen ausreichen. Der genaue Wert ist

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2{,}4674011.$$

Bei diesem Beispiel gelang es, auf bequeme Art weitere Funktionen F_2, F_3 zu berechnen und so die Genauigkeit zu steigern. Bei komplizierteren Problemen stößt die Berechnung weiterer F_n oft auf große praktische Schwierigkeiten, und da wird

[1]) Vgl. H. v. SANDEN, Praxis der Differentialgleichungen, Berlin 1943, S. 73.

die Methode der schrittweisen Näherungen uns in den Stand setzen, allein aus F_0 und F_1 erheblich genauere Schranken für den ersten Eigenwert aufzustellen, als dies mit Hilfe des Einschließungssatzes möglich ist.

9·3. Beweis des Einschließungssatzes. Nach (9·1), (9·2) verwendet man beim Einschließungssatz zwei Funktionen F_0, F_1, die der Beziehung genügen:

$$M[F_1] = N[F_0] = (-1)^n [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}.$$

Setzt man hier nach (9·3)

$$F_0^{(n)} = \Phi(x) \cdot F_1^{(n)}$$

ein, so genügt F_1 der Differentialgleichung:

$$M[F_1] = (-1)^n [g_n(x) \Phi(x) F_1^{(n)}]^{(n)}, \tag{9·9}$$

d. h. F_1 ist eine Eigenfunktion dieser Differentialgleichung bei den Randbedingungen $U_\mu[F_1] = 0$.

Nun bildet man die drei Vergleichsprobleme:

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ M[y] = (-1)^n \lambda' \ \ [g_n(x) \Phi_{\min} y^{(n)}]^{(n)} \\ 2.\ M[y] = (-1)^n \lambda'' \ [g_n(x) \Phi(x) y^{(n)}]^{(n)} \\ 3.\ M[y] = (-1)^n \lambda''' [g_n(x) \Phi_{\max} y^{(n)}]^{(n)} \end{array}\right. \tag{9·10}$$

(stets bei den Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$).

Das zweite Problem besitzt die Eigenfunktion $y = F_1$ mit dem Eigenwert 1, und zwar sei 1 der s-te Eigenwert dieses Problems:

$$y = F_1; \quad \lambda_s'' = 1.$$

Das erste und das dritte Problem besitzen die Eigenfunktionen $y = y_s$ mit den Eigenwerten λ_s', λ_s''', und zwar ist (mit λ_s als dem s-ten Eigenwert des Ausgangsproblems (9·1), (4·8))

$$\lambda_s' \ \Phi_{\min} = \lambda_s,$$
$$\lambda_s''' \Phi_{\max} = \lambda_s,$$

also

$$\lambda_s' = \frac{\lambda_s}{\Phi_{\min}}, \qquad \lambda_s''' = \frac{\lambda_s}{\Phi_{\max}}.$$

Nun sind die Voraussetzungen des Vergleichungssatzes aus 8·5 erfüllt. Dazu hat man die Ungleichung (8·20)

$$\int_a^b u N[u] dx \geq \int_a^b u N^*[u] dx$$

nachzuprüfen. Hier ist, wie man durch n-malige Teilintegration sieht, für alle Vergleichsfunktionen u nach der Voraussetzung d) des Satzes in 9·1

(wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_n(x)$ als positiv voraussetzen):

$$\int_a^b u(-1)^n [g_n \Phi_{\max} u^{(n)}]^{(n)} dx$$
$$= \int_a^b g_n(x) \Phi_{\max} [u^{(n)}]^2 dx \geq \int_a^b g_n \Phi(x) [u^{(n)}]^2 dx \geq \int_a^b g_n \Phi_{\min} [u^{(n)}]^2 dx,$$

also hat man nach dem Vergleichungssatz

$$\frac{\lambda_s}{\Phi_{\max}} \leq 1 \leq \frac{\lambda_s}{\Phi_{\min}},$$

d. h. es gilt (9·4).

9·4. Vergleich mit geschlossen lösbaren Problemen. Es gelingt oft, mit Hilfe des Einschließungssatzes und Vergleichungssatzes für alle Eigenwerte Schranken anzugeben. Liegt z. B. das Problem

$$-y'' = \lambda p(x) y, \quad y(0) = y(a) = 0 \qquad (a > 0)$$

vor, so vergleiche man das Problem mit einem gleichgebauten Problem

$$-y'' = \lambda^* p^*(x) y$$

mit denselben Randbedingungen, dessen Eigenwerte λ_n^* man kennt. Z. B. bei

$$p^*(x) = \frac{c}{(x+b)^2} \qquad (b > 0, \ c > 0)$$

hat man (nach Tafel V) die Eigenwerte

$$\lambda_n^* = \frac{n^2 \pi^2}{c \left(\ln \frac{a+b}{b}\right)^2} + \frac{1}{4c}$$

mit den Eigenfunktionen

$$y_n^* = \sqrt{x+b} \sin \left(\frac{n \pi \ln \frac{x+b}{b}}{\ln \frac{a+b}{b}} \right)$$

Verwendet man y_n^* als F_1 im Einschließungssatz, so wird nach (9·6)

$$\Phi = \lambda_n^* \frac{p^*}{p}$$

und man hat die Schranken

$$\Phi_{\min} = \lambda_n^* \left(\frac{p^*}{p}\right)_{\min} \leq \lambda_n \leq \Phi_{\max} = \lambda_n^* \left(\frac{p^*}{p}\right)_{\max}$$

Je besser man p^* an p anpassen kann, um so enger fallen die Schranken aus, und zwar sind die Schranken für alle Eigenwerte prozentual gerechnet gleich eng. Es ist also gut, wenn man eine möglichst große Sammlung geschlossen lösbarer Eigenwertprobleme hat. In Tafel V sind einige einfache geschlossen lösbare Fälle zusammengestellt.

Tafel V. Einige in geschlossener Form lösbare Eigenwertprobleme mit Gleichungen 2. Ordnung.

Problemtypus	Differentialgleichung	Randbedingungen	Eigenwerte $\lambda_n =$	Eigenfunktionen $y_n =$
$-y'' = \lambda g_0(x)\, y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-y'' = \lambda y$	bei verschiedenen Randbedingungen in Tafel VI		
	$-y'' = \frac{\lambda y}{(x+c)^2}$	$y(a) = y(b) = 0$ mit $x + c \neq 0$ in (a, b)	$\frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{\ln\frac{a+c}{b+c}}\right)^2$	$\sqrt{x+c}\,\sin\frac{n\pi[\ln(x+c) - \ln(b+c)]}{\ln(a+c) - \ln(b+c)}$
	$-y'' = \frac{\lambda y}{x^4}$	$y(a) = y(b) = 0$ mit $0 < a < b$	$\left(\frac{n\pi ab}{a-b}\right)^2$	$x \cdot \sin\left[\frac{n\pi b}{b-a}\left(1 - \frac{a}{x}\right)\right]$
	$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 - x^2)^2}$	$y(a) = y(b) = 0$ mit $-c < a < b < c$	$c^2 + \left(\frac{2cn\pi}{\ln\left(\frac{c+b}{c-b}\,\frac{c-a}{c+a}\right)}\right)^2$	$\sqrt{c^2 - x^2}\,\sin\left[n\pi\frac{\ln\frac{c+x}{c-x}\,\frac{c-a}{c+a}}{\ln\frac{c+b}{c-b}\,\frac{c-a}{c+a}}\right]$
	$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 + x^2)^2}$	$y(a) = y(b) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{cn\pi}{\operatorname{arctg}\frac{b}{c} - \operatorname{arctg}\frac{a}{c}}\right)^2$	$\sqrt{c^2 + x^2}\,\sin\left[n\pi\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{c} - \operatorname{arctg}\frac{a}{c}}{\operatorname{arctg}\frac{b}{c} - \operatorname{arctg}\frac{a}{c}}\right]$
	$-y'' = \frac{\lambda y}{x}$	$y(0) = y(a) = 0$	$J_1(2\sqrt{\lambda_n a}) = 0$	$\sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{\lambda_n x})$ (BESSEL-Funktion J_1)
	$-y'' = \frac{\lambda y}{x(a-x)}$	$y(0) = y(a) = 0$	$n(n+1)$	$(x^2 - ax)P_n'\left(\frac{2x}{a} - 1\right)$ Ableitung der Kugelfunktion
	$-y'' = \lambda g_0 y$ mit $g_0 = \begin{cases} c \text{ für } 0 \leq x < \alpha \\ d \text{ für } \alpha < x \leq l \end{cases}$	$y(0) = y(l) = 0$	$\operatorname{tg}[\alpha\sqrt{\lambda_n c}]$ $+\sqrt{\frac{c}{d}}\operatorname{tg}[(l-\alpha)\sqrt{\lambda_n d}] = 0$	$\begin{cases} \sin[\sqrt{\lambda_n d}(l-\alpha)]\sin[\sqrt{\lambda_n c}\,x] \\ \text{für } 0 \leq x \leq \alpha \\ \sin[\sqrt{\lambda_n c}\,\alpha]\sin[\sqrt{\lambda_n d}(l-x)] \\ \text{für } \alpha \leq x \leq l \end{cases}$

Tafel V (Fortsetzung).

Problemtypus	Differentialgleichung	Randbedingungen	Eigenwerte $\lambda_n =$	Eigenfunktionen $y_n =$
$-y'' + f_0 y = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-y'' + c^2 y = \lambda e^{-4cx} y$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{2n\pi c}{e^{-2bc} - e^{-2ac}}\right)^2$	$e^{cx} \sin\left[n\pi \frac{e^{-2cx} - e^{-2ac}}{e^{-2bc} - e^{-2ac}}\right]$
	$-y'' + \frac{c(c-1)}{x^2} y = \frac{\lambda y}{x^{4c}}$	$y(a) = y(b) = 0$ mit $0 < a < b$	$\left(\frac{(2c-1)n\pi}{b^{-2c+1} - a^{-2c+1}}\right)^2$	$x^c \sin\left[n\pi \frac{x^{-2c+1} - a^{-2c+1}}{b^{-2c+1} - a^{-2c+1}}\right]$
$-(f_1 y')' = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-[(cx+d)^2 y']' = \lambda(cx+d)^2 y$	$y(a) = y(b) = 0$ $cx + d \neq 0$ in (a, b)	$\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$\frac{1}{cx+d} \sin\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$
	$-(e^{cx} y')' = \lambda e^{cx} y$	$y(a) = y(b) = 0$	$\frac{c^2}{4} + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$e^{-\frac{cx}{2}} \sin\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$
	$-[y' \sin^2(cx+d)]' = \lambda y \sin^2(cx+d)$	$y(a) = y(b) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$\frac{\sin\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)}{\sin(cx+d)}$ Für $(b-a)c > \pi$ endlich viele negative Eigenwerte
	$-(x^{\frac{3}{2}} y')' = \lambda x^{\frac{1}{2}} y$	$y(a) = y(b) = 0$ mit $0 < a < b$	$\left(\frac{n\pi}{2(\sqrt{b} - \sqrt{a})}\right)^2$	$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left[n\pi \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}\right]$
	$-(p(x) y')' = \frac{\lambda y}{p(x)}$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{\int_a^b \frac{d\xi}{p(\xi)}}\right)^2$	$\sin\left[\frac{n\pi \int_a^x \frac{d\xi}{p(\xi)}}{\int_a^b \frac{d\xi}{p(\xi)}}\right]$
	$-\left(\frac{1}{p(x)} y'\right)' = \lambda p(x) q^4(x) y$ mit $q(x) = \left[\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi\right]^{-1}$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{\nu\pi}{q(b) - q(a)}\right)^2$	$\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi \sin\left[n\pi \frac{q(x) - q(a)}{q(b) - q(a)}\right]$

$-y'' + f(x)y' = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-y'' + 2c(\operatorname{tg} cx)y' = \lambda y$	$y(a) = y(b) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$\frac{1}{\cos cx} \sin\left[n\pi \frac{x-a}{b-a}\right]$
	$-y'' - 2c(\mathfrak{T}\mathrm{g}\, cx)y' = \lambda y$	$y(a) = y(b) = 0$	$c^2 + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$\frac{1}{\mathfrak{Cof}\, cx} \sin\left[n\pi \frac{x-a}{b-a}\right]$
	$-y'' - c(\operatorname{tg} cx)y' = \lambda(\cos cx)^2 y$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi c}{\sin cb - \sin ca}\right)^2$	$\sin\left[n\pi \frac{\sin cx - \sin ca}{\sin cb - \sin ca}\right]$
$-y'' + fy' + f_0 y = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-y'' - \frac{4}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = \lambda y$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$\frac{1}{x^2} \sin\left[n\pi \frac{x-a}{b-a}\right]$
	$-y'' - 2cxy' - c^2 x^2 y = \lambda y$	$y(a) = y(b) = 0$	$c + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$e^{-\frac{cx^2}{2}} \sin\left[n\pi \frac{x-a}{b-a}\right]$
$-(f_1 y')' = \lambda g_0 y$ $y'(a) = y(b) = 0$	$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 - x^2)^2}$	$y'(0) = y(l) = 0$ mit $\|l\| < c$	$c^2 + \left(\frac{(2n-1)c\pi}{\ln \frac{c+l}{c-l}}\right)^2$	$\sqrt{c^2 - x^2} \cos\left[\frac{2n-1}{2} \pi \frac{\ln \frac{c+x}{c-x}}{\ln \frac{c+l}{c-l}}\right]$
	$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 + x^2)^2}$	$y'(0) = y(l) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{(2n-1)c\pi}{2 \operatorname{arctg} \frac{l}{c}}\right)^2$	$\sqrt{c^2 + x^2} \cos\left[\frac{2n-1}{2} \pi \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{c}}{\operatorname{arctg} \frac{l}{c}}\right]$
	$-y'' = \lambda g_0 y$ mit $g_0 = \begin{cases} c \text{ für } 0 \leq x < \alpha \\ d \text{ für } \alpha < x \leq l \end{cases}$	$y'(0) = y(l) = 0$	$\operatorname{tg}\left[\alpha \sqrt{\lambda_n c}\right] \cdot \operatorname{tg}\left[(l - \alpha) \sqrt{\lambda_n d}\right] = \sqrt{\frac{d}{c}}$	$\begin{cases} \sin\left[\sqrt{\lambda_n d}(l-\alpha)\right] \cos\left[\sqrt{\lambda_n c}\, x\right] \\ \text{für } 0 \leq x \leq \alpha \\ \cos\left[\sqrt{\lambda_n c}\, \alpha\right] \sin\left[\sqrt{\lambda_n d}(l-x)\right] \\ \text{für } \alpha \leq x \leq l \end{cases}$
	$-\left(\frac{1}{p(x)} y'\right)' = \lambda p(x) y$	$y'(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{\int_a^b p(\xi) d(\xi)}\right)^2$	$\cos\left[\frac{2n-1}{2} \pi \frac{\int_a^x p(\xi) d\xi}{\int_a^b p(\xi) d\xi}\right]$
Periodizität	$-[y' \sin^2(cx + d)]' = \lambda y \sin^2(cx + d)$	$\begin{cases} y(a) = y\left(a + \frac{2\pi}{c}\right) \\ y'(a) = y'\left(a + \frac{2\pi}{c}\right) \end{cases}$	$-c^2 + c^2 n^2$	$\frac{1}{\sin(cx + d)} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} [nc(x - a)]$ $n = 0$ einfacher Eigenwert $n > 0$ doppelter Eigenwert

Eine Reihe weiterer geschlossen lösbarer Eigenwertprobleme (mit singulären Randpunkten und mit unendlichem Grundgebiet) sind zusammengestellt bei E. Madelung. Mathematische Hilfsmittel des Physikers. 3. Aufl.. Berlin 1936, S. 200.

Tafel VI. Transzendente Gleichungen für die

Differential-gleichung	Randbedingungen Abkürzungen: $y_0 = y(0)$, $y'_l = y'(l)$ usw.	Spezialfall	Transzendente Gleichung für die Eigenwerte
$-y'' = \lambda y$ $\lambda = k^2$	$a y'_0 + b y_0 = 0$ $c y'_l + d y_l = 0$		$\operatorname{tg} kl = \frac{(ad - bc)k}{bd + ack^2}$
	$y_0 = y_l = 0$	$a = c = 0$	$\sin kl = 0$
	$y'_0 = y'_l = 0$	$b = d = 0$	$\sin kl = 0$
	$y_0 = y'_l = 0$	$a = d = 0$	$\cos kl = 0$
	$y_0 = y'_l + A y_l = 0$	$a = 0$	$A \cdot \operatorname{tg} kl = -k$
		$Al = 1$	$\operatorname{tg} kl = -kl$
		$Al = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} kl = -2kl$
		$Al = -\frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} kl = 2kl$
		$Al = -1$	$\operatorname{tg} kl = kl$
	$y'_0 = y'_l + A y_l = 0$	$b = 0$	$k \cdot \operatorname{tg} kl = A$
		$Al = 2$	$kl \cdot \operatorname{tg} kl = 2$
		$Al = 1$	$kl \cdot \operatorname{tg} kl = 1$
		$Al = -1$	$kl \cdot \operatorname{tg} kl = -1$
		$Al = -2$	$kl \cdot \operatorname{tg} kl = -2$
	$y_0 = y' - \lambda A y_l = 0$		$kA \cdot \operatorname{tg} kl = 1$
	$a y_l + b y_0 = 0$ $c y'_l + d y'_0 = 0$		$-\cos kl = A = \frac{ac + bd}{bc + ad}$
	$y_0 = y_l$, $y'_0 = y'_l$	$b = -a$ $d = -c$	$\cos kl = 1$
$-y'' - \frac{y'}{x} + \frac{n^2 y}{x^2} = \lambda y$ $\lambda = k^2$ (n ganzzahlig, ≥ 0) J_n = Bessel-Funktion	y_0 endlich, $y_l = 0$		$J_n(kl) = 0$
		$n = 0$	$J_0(kl) = 0$
		$n = 1$	$J_1(kl) = 0$
		$n = 2$	$J_2(kl) = 0$

Eigenwerte bei den einfachsten Problemen.

Zahlenwerte $k_i\,l$ zur Berechnung der ersten Eigenwerte λ_i	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2}$	Literatur Benutzte Abkürzungen siehe S. 39
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\,l}\,\frac{3\,ac + l^2 bd}{ad - bc - l\,bd}$		FRANK-V. MISES, Differential- und Integralgleichungen Bd. I, 2. Aufl. (1930) 573
$kl = \pi;\ \ 2\pi;\ \ 3\pi$	$\frac{1}{6}$	
$kl = 0;\ \ \pi;\ \ 2\pi$	∞	
$kl = \frac{\pi}{2};\ \ \frac{3\pi}{2};\ \ \frac{5\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{Al+3}{6(Al+1)}$	F. EMDE, Tafeln elementarer Funktionen, Leipzig u. Berlin (1940) 125—131
$kl = 2{,}0288;\ \ 4{,}9132;\ \ 7{,}9787$	$\frac{1}{3}$	
$kl = 1{,}8366;\ \ 4{,}8158$	$\frac{7}{18}$	
$kl = 1{,}1656;\ \ 4{,}6042$	$\frac{5}{6}$	
$kl = 0;\ \ 4{,}4934;\ \ 7{,}7253;\ \ 10{,}9041$	∞	
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{Al}$	BIOT, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934) 217
$kl = 1{,}0769;\ \ 3{,}6436$	1	
$kl = 0{,}8603;\ \ 3{,}4256;\ \ 6{,}4373$	$\frac{3}{2}$	F. EMDE, Tafeln elementarer Funktionen (1940) 125—131
$kl = i\cdot 1{,}1997;\ \ 2{,}7984;\ \ 6{,}1212$	$-\frac{1}{2}$	
$kl = i\cdot 2{,}0653;\ \ 2{,}4587;\ \ 5{,}9594$	0	S. TIMOSHENKO (1932) 231
	$\frac{1}{2(1+A)}$	
$kl = 0;\ \ 2\pi;\ \ 2\pi;\ \ 4\pi;\ \ 4\pi;\ \ldots$	∞	
	$\frac{1}{4(n+1)}$	
$kl = 2{,}4048;\ \ 5{,}5201;\ \ 8{,}6537$	$\frac{1}{4}$	E. JAHNKE — F. EMDE, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig u. Berlin, 3. Aufl. 1938, S. 166—168
$kl = 3{,}8317;\ \ 7{,}0156;\ \ 10{,}1735$	$\frac{1}{8}$	
$kl = 5{,}135;\ \ 8{,}417;\ \ 11{,}620$	$\frac{1}{12}$	

Tafel VI

Differentialgleichung	Randbedingungen Abkürzungen: $y_0 = y(0)$, $y_l' = y'(l)$ usw.	Spezialfall	Transzendente Gleichung für die Eigenwerte
$-y'' - \frac{y'}{x} + \frac{n^2 y}{x^2} = \lambda y$	y_0 endlich, $y_l' + A y_l = 0$		$kJ_n'(kl) + AJ_n(kl) = 0$
$\lambda = k^2$		$n = A = 0$	$J_1(kl) = 0$
(n ganzzahlig, ≥ 0)		$n = 0;\ Al = 1$	$-klJ_1(kl) + J_0(kl) = 0$
J_n = BESSELsche Funktion		$n = 1;\ Al = 0$	$klJ_0(kl) - J_1(kl) = 0$
N_n = NEUMANNsche Funktion		$n = Al = 1$	$J_0(kl) = 0$
	$y_a = y_l = 0$	$l = 2a,\ n = 0$ $l = 2a,\ n = 1$	$J_n(ka)N_n(kl) = J_n(kl)N_n(ka)$
$y^{\mathrm{IV}} = \lambda y$ $\lambda = k^4$	$y_0 = y_0'' = 0$ $a y_l'' + b y_l' = 0$ $c y_l''' + d y_l = 0$		$(ack^4 + bd)\mathfrak{B}(kl) - bck^3\mathfrak{C}(kl) + adk\mathfrak{S}(kl) = 0$
	$y_0 = y_0'' = y_l = y_l'' = 0$	$b = c = 0$	$\sin kl = 0$
	$y_0 = y_0'' = y_l = y_l' = 0$	$a = c = 0$	$\mathrm{tg}\, kl = \mathfrak{Tg}\, kl$
	$y_0 = y_0'' = y_l'' = y_l''' = 0$	$b = d = 0$	$\mathrm{tg}\, kl = \mathfrak{Tg}\, kl$
	$y_0 = y_0' = 0$ $a y_l'' + b y_l' = 0$ $c y_l''' + d y_l = 0$		$ack^4\mathfrak{E}(kl) + bck^3\mathfrak{A}(kl) - adk\mathfrak{B}(kl) + bd\mathfrak{D}(kl) = 0$
	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	$a = c = 0$	$\cos kl\, \mathfrak{Cof}\, kl = 1$
	$y_0 = y_0' = y_l'' = y_l''' = 0$	$b = d = 0$	$\cos kl\, \mathfrak{Cof}\, kl = -1$
	$y_0 = y_l = 0$ $a y_0'' + b y_0' = 0$ $c y_0'' + d y_l' = 0$		$ack^2\mathfrak{S}(kl) + bd\mathfrak{D}(kl) + k(ad - bc)\mathfrak{B}(kl) = 0$
	$y_0 = y_l = 0$ $l y_0'' + y_0' = l y_l'' + y_l' = 0$	$a = c = l$ $b = d = 1$	$(kl)^2\mathfrak{S}(kl) + \mathfrak{D}(kl) = 0$
	$y_0 = y_l'' = 0$ $a y_0'' + b y_0' = 0$ $c y_l''' + d y_l = 0$		$adk\mathfrak{S}(kl) + cbk^3\mathfrak{E}(kl) + (ack^4 - bd)\mathfrak{B}(kl) = 0$
	$y_0'' = y_0''' = y_l'' = y_l''' = 0$		$\cos kl\, \mathfrak{Cof}\, kl = 1$
	$y_0' = y_0''' = y_l' = y_l''' = 0$		$\sin kl = 0$

(Fortsetzung).

Zahlenwerte $k_i l$ zur Berechnung der ersten Eigenwerte λ_i	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2}$	Literatur
Werte von kl s. S. 145	$\frac{1}{4}\frac{Al+n+2}{(n+1)(Al+n)}$	
$kl = 1{,}2558;\ 4{,}0794;\ 7{,}156$	$\frac{3}{4}$	
$kl = 1{,}841;\ 5{,}331;\ 8{,}536$	$\frac{3}{8}$	
Werte von kl s. S. 145		
$ka = 3{,}123;\ 6{,}273;\ 9{,}418$ $ka = 3{,}197;\ 6{,}312;\ 9{,}4445$		JAHNKE — EMDE, Funktionentafeln (1938) 206
	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^4}$	
$kl = \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ \ldots$	$\frac{1}{90}$	
$kl = 3{,}9266;\ 7{,}0686;\ 10{,}210;\ 13{,}352$	$\frac{1}{210}$	F. EMDE, Tafeln elementarer Funktionen (1940) 130—131
$kl = 0;\ 3{,}9266;\ 7{,}0686;\ 10{,}210;\ 13{,}352$	∞	Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, Bd. I, Berlin, 27. Aufl. 1942, S. 236—237
$kl = 4{,}7300;\ 7{,}853;\ 10{,}996;\ 14{,}137$	$\frac{1}{420}$	
$kl = 1{,}8750;\ 4{,}694;\ 7{,}855;\ 10{,}996$[1]	$\frac{1}{12}$	[1]) von L. EULER 1744 auf 10 Dezimalen berechnet
		In diesem Abschnitt werden die Abkürzungen für die Frequenzfunktionen
$kl = 3{,}084;\ 6{,}270$		$\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{Cos}\, x \sin x + \mathfrak{Sin}\, x \cos x$ $\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{Cos}\, x \sin x - \mathfrak{Sin}\, x \cos x$ $\mathfrak{C}(x) = 2\, \mathfrak{Cos}\, x \cos x$ $\mathfrak{S}(x) = 2\, \mathfrak{Sin}\, x \sin x$ $\mathfrak{D}(x) = \mathfrak{Cos}\, x \cos x - 1$ $\mathfrak{E}(x) = \mathfrak{Cos}\, x \cos x + 1$
$kl = 0;\ 0;\ 4{,}7300;\ 7{,}853$ s. o.		benutzt nach K. HOHENEMSER und W. PRAGER, Dynamik der Stabwerke, Berlin 1933, 323
$kl = 0;\ \pi;\ 2\pi;\ \ldots$		

Tafel VI

Differential-gleichung	Randbedingungen Abkürzungen: $y_0 = y(0)$, $y'_l = y'(l)$ usw.	Spezialfall	Transzendente Gleichung für die Eigenwerte
$y^{IV} = -\lambda y''$ $\lambda = k^2$	$\begin{cases} y_0 = y''_0 = 0 \\ a y''_l + b y'_l = 0 \\ c y'''_l + d y_l = 0 \end{cases}$		$b(k^3 c + kld)\cos kl = d(k^2 la + b)\sin kl$
		$a = lb$; $l^3 d = -c$	$\operatorname{tg} kl = kl \frac{1 - k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}$
	$y_0 = y''_0 = y_l = y''_l = 0$	$b = c = 0$	$\sin kl = 0$
	$y_0 = y''_0 = y_l = y'_l = 0$	$a = c = 0$	$\operatorname{tg} kl = kl$
	$\begin{cases} y_0 = y'_0 = 0 \\ a y''_l + b y'_l = 0 \\ c y'''_l + d y_l = 0 \end{cases}$		$k^4 ac + [k^3 bc + kd(bl - a)]\sin kl + k^2 lad \cos kl - 2bd(1 - \cos kl) = 0$
	$y_0 = y'_0 = y_l = y'_l = 0$	$a = c = 0$	$\sin \frac{kl}{2} = 0$ und $\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2}$
	$\begin{cases} y_0 = y_l = 0 \\ a y''_0 + b y'_0 = 0 \\ c y''_l + d y'_l = 0 \end{cases}$		$aclk^3 \sin kl + k(bc - ad)(kl\cos kl - \sin kl) + bd(kl \sin kl - 2 + 2\cos kl) = 0$
	$\begin{cases} y_0 = y_l = 0 \\ l y''_0 + y'_0 = l y''_l + y'_l = 0 \end{cases}$	$a = c = l$ $b = d = 1$	$\sin \frac{kl}{2} = 0$ und $\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{kl + k^3 l^3}{2}$
$y^{IV} - A y'' = \lambda y$ $s = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda + A^2} + \frac{1}{2} A}$	$y_{-l} = y'_{-l} = y_l = y'_l = 0$		$\begin{cases} r \operatorname{tg} \frac{r}{2} + s \cdot \mathfrak{Tg} \frac{s}{2} = 0 \quad \text{und} \\ \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{r}{2} = \frac{1}{s} \mathfrak{Tg} \frac{s}{2} \end{cases}$
$r = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda + A^2} - \frac{1}{2} A}$	$y_{-l} = y'_{-l} = y_l = y''_l = 0$		$\frac{1}{r} \operatorname{tg} r = \frac{1}{s} \mathfrak{Tg}\, s$
$y^{IV} + 2y'' + y = \lambda(Ay - y'')$ $\begin{Bmatrix} k \\ s \end{Bmatrix} = \sqrt{\pm \frac{2 + A}{2} + \sqrt{\left(\frac{2 + A}{2}\right)^2 + A\lambda - 1}}$	$y_{-l} = y'_{-l} = y_l = y'_l = 0$		$2 + \frac{s^2 - k^2}{sk} \sin kl\, \mathfrak{Sin}\, sl - 2\cos kl\, \mathfrak{Cos}\, sl = 0$

(Fortsetzung).

Zahlenwerte $k_i l$ zur Berechnung der ersten Eigenwerte λ_i	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2}$	Literatur
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2} = \frac{1}{10} \frac{b d l^3 - 15 b c + 5 a d l^2}{b d l^3 - 3 b c + 3 a d l^2}$		
$kl = 2{,}1826;\ \ 4{,}9292$	$\frac{3}{10}$	
$kl = \pi;\ \ 2\pi;\ \ \ldots$	$\frac{1}{6}$	
$kl = 4{,}4934;\ \ldots$ s. S. 145	$\frac{1}{10}$	
für $c = 0,\ \ a = lb$: $kl = 4{,}7926;\ \ 7{,}8223$	$\frac{7}{75}$	
$kl = 2\pi;\ \ 8{,}987;\ \ 4\pi;\ \ \ldots$	$\frac{1}{15}$	
$kl = 3{,}0096;\ \ 2\pi;\ \ 9{,}4200;\ \ 4\pi$	$\frac{29}{165}$	
		W. Meyer zur Capellen, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) 243
		S. Timoshenko, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) 360

§ 10. Der Entwicklungssatz.

10·1. Vorbemerkungen. In § 8 wurde für volldefinite selbstadjungierte Eigenwertaufgaben der Form (4·5) bis (4·8) die Existenz von unendlich vielen reellen positiven Eigenwerten λ_i bewiesen. Die Eigenwerte denken wir uns wieder der Größe nach geordnet: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$; zu jedem Eigenwert λ_i gehört eine Eigenfunktion y_i; die Eigenfunktionen können wir uns normiert und in verallgemeinertem Sinne orthogonalisiert denken (vgl. 5·33):

$$(10{\cdot}1) \qquad \int_a^b y_i N[y_k]\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Dann gilt wegen $M[y_k] = \lambda_k N[y_k]$ auch

$$(10{\cdot}2) \qquad \int_a^b y_i M[y_k]\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ \lambda_k & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Wir beschäftigen uns weiterhin mit der Frage, ob man willkürlich gegebene Vergleichsfunktionen $u(x)$ nach den Eigenfunktionen $y_k(x)$ „entwickeln" kann, d. h. ob es eine Darstellung gibt:

$$(10{\cdot}3) \qquad u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(x)$$

mit Konstanten a_k. Auf diese Fragestellung wurden wir bereits in 2·1 geführt, und der sogenannte „Entwicklungssatz" ist ein wichtiges Hilfsmittel, das wir an verschiedenen Stellen gebrauchen werden.

10·2. Fourier-Koeffizienten. Bei dem einfachen Beispiel des Eigenwertproblems

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

gehören zu den Eigenwerten $\lambda_k = k^2$ die normierten Eigenfunktionen $y_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$. Aus der Theorie der Fourier-Reihen weiß man, daß man jede Vergleichsfunktion $u(x)$, also jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $u(x)$ mit $u(0) = u(\pi) = 0$, durch $u(-x) = -u(x)$ zu einer in $-\pi \leq x \leq \pi$ definierten ungeraden Funktion ergänzen und in eine trigonometrische Reihe, hier speziell in eine Sinusreihe, entwickeln kann[1]):

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

---

[1]) K. Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Leipzig 1942. Die Voraussetzung der stetigen zweimaligen Differenzierbarkeit ist für die Entwickelbarkeit von u in eine trigonometrische Reihe nicht erforderlich, es genügt bereits, daß $u(x)$

Die „FOURIER-Koeffizienten“ b_k sind dabei durch die Formeln[1]) gegeben:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x) \sin k x \, d x .$$

Setzt man $\sin k x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_k$ und $b_k \sqrt{\frac{\pi}{2}} = a_k$, so erhält man

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(x)$$

mit

$$a_k = \int_0^\pi u(x) y_k(x) \, d x .$$

In diesem einfachen Beispiel zeigt uns die Theorie der FOURIER-Reihen die Entwickelbarkeit einer beliebigen Vergleichsfunktion u nach den Eigenfunktionen y_k, und wir fragen nun nach der Entwickelbarkeit bei komplizierteren Eigenwertproblemen.

Nehmen wir versuchsweise eine Entwicklung (10·3) als gültig an, multiplizieren wir sie mit $N[y_i(x)]$ und nehmen wir an, man dürfe die so entstehende Reihe gliedweise über das Intervall a, b integrieren, so würden auf der rechten Seite wegen (10·1) alle Glieder bis auf das Glied mit $k = i$ fortfallen, und man erhielte

$$\int_a^b u(x) N[y_i(x)] \, dx = a_i . \tag{10·4}$$

Diese heuristische Betrachtung führt uns zu der

Definition: Als FOURIER-Koeffizienten a_i einer gegebenen stetigen Funktion $u(x)$ in bezug auf die Eigenwertaufgabe (4·5) bis (4·8) werden die Größen (10·4) eingeführt.

Mit diesen Größen a_i kann man formal die Reihe bilden:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x) , \tag{10·5}$$

und es ergeben sich die Fragen:

1. Konvergiert die Reihe (10·5)?

2. Wenn die Reihe (10·5) konvergiert, stellt sie dann die Funktion $u(x)$ dar, mit der die Koeffizienten a_i gebildet wurden?

---

stetig und von beschränkter Schwankung ist (KNOPP, Bd. II, S. 519); sogar die Stetigkeitsforderung kann noch gemildert werden.

[1]) K. KNOPP, a. a. O., Bd. III, S. 504.

10·3. Die Parsevalsche Formel. Wir setzen jetzt weiterhin $u(x)$ als Vergleichsfunktion voraus. Zunächst läßt sich zeigen, daß bei der formal angesetzten Reihe (10·5) stets

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$$

konvergiert, daß also jedenfalls die a_i mit wachsendem i gegen Null gehen. Dazu führen wir den „Rest" $r_p(x)$ der Reihe (10·5) ein und setzen

$$r_p(x) = u(x) - \sum_{i=1}^{p} a_i y_i(x). \tag{10·6}$$

$r_p(x)$ ist jedenfalls eine Vergleichsfunktion. Ist $r_p \equiv 0$ für eine Zahl p, so ist u eine Linearkombination der Eigenfunktionen $y_1, \ldots, y_p$; dann sind nach (10·1) und (10·4) $a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = 0$ und daher auch alle folgenden $r_{p+1} = r_{p+2} = \cdots = 0$ und die aufgeworfenen Konvergenzfragen trivial. Wir setzen daher $r_p \not\equiv 0$ voraus.

Wenn wir zeigen können, daß $r_p(x)$ mit wachsendem p für alle x aus $a \leq x \leq b$ gegen 0 strebt, so sind die am Schlusse von 10·2 gestellten Konvergenzfragen bejahend beantwortet.

Die Funktion $r_p(x)$ ist im verallgemeinerten Sinne orthogonal zu den p ersten Eigenfunktionen $y_1, y_2, \ldots, y_p$; denn es ist mit Benutzung von (10·1) und (10·4)

$$\int_a^b r_p N[y_k]dx = \int_a^b u N[y_k]dx - \sum_{i=1}^{p} a_i \int_a^b y_i N[y_k]dx = a_k - a_k = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, p. \tag{10·7}$$

Ebenso ist wegen $M[y_k] = \lambda_k N[y_k]$ auch

$$\int_a^b r_p M[y_k]dx = 0 \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots, p. \tag{10·8}$$

Nach dem Satze in 8·3 ist daher der RAYLEIGHsche Quotient, gebildet mit der Funktion r_p, eine obere Schranke für den $(p+1)$-ten Eigenwert λ_{p+1}:

$$R[r_p] \geq \lambda_{p+1}.$$

Nun sind in den RAYLEIGHschen Quotienten

$$R[r_p] = \frac{Z_p}{N_p} \quad \text{mit} \quad Z_p = \int_a^b r_p M[r_p]dx \quad \text{und} \quad N_p = \int_a^b r_p N[r_p]dx$$

die Zähler Z_p beschränkt. Denn es gilt wegen (10·8) und (10·2)

$$\begin{aligned} \int_a^b u M[u]dx &= \int_a^b \left(r_p + \sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right) M\left[r_p + \sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right] dx \\ &= Z_p + \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right) M\left[\sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right] dx \\ &= Z_p + \sum_{i=1}^{p} a_i^2 \lambda_i, \end{aligned} \tag{10·9}$$

auf der linken Seite steht die feste Zahl

$$\int_a^b u M[u]\,dx,$$

folglich sind die Z_p für alle p beschränkt; aus $R[r_p] \geqq \lambda_{p+1}$ ergibt sich

$$N_p \leqq \frac{Z_p}{\lambda_{p+1}}.$$

Da Z_p beschränkt bleibt und λ_{p+1} mit wachsendem p unbegrenzt wächst, strebt N_p mit wachsendem p gegen 0. Analog zu (10·9) gilt wegen (10·7) und (10·1):

$$\begin{aligned}\int_a^b u N[u]\,dx &= \int_a^b \left(r_p + \sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right) N\left[r_p + \sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right] dx\\ &= N_p + \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right) N\left[\sum_{i=1}^{p} a_i y_i\right] dx \qquad (10\cdot 10)\\ &= N_p + \sum_{i=1}^{p} a_i^2.\end{aligned}$$

Für $p \to \infty$ erhält man somit die sogenannte PARSEVALsche Formel

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \int_a^b u N[u]\,dx. \qquad (10\cdot 11)$$

Aus ihr kann man leicht eine ebenfalls oft gebrauchte Formel ableiten, die sich auf zwei Vergleichsfunktionen $u(x)$, $v(x)$ und ihre FOURIER-Konstanten a_i, b_i bezieht. Schreibt man nämlich die PARSEVALsche Formel für die Funktion $u(x) + v(x)$ auf:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^2\\ &\quad = \int_a^b (u+v) N[u+v]\,dx = \int_a^b u N[u]\,dx + 2\int_a^b u N[v]\,dx + \int_a^b v N[v]\,dx\end{aligned}$$

und zieht von dieser Gleichung die PARSEVALschen Formeln für die Funktionen u und v ab, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \int_a^b u N[v]\,dx. \qquad (10\cdot 12)$$

Zusatz 1: Man kann unter etwas schwächeren Voraussetzungen anstatt der PARSEVALschen Gleichung (10·11) eine PARSEVALsche Ungleichung (10·13) aufstellen. Dazu wird der Begriff der „halbzulässigen" Funktion eingeführt. Damit nämlich eine Funktion $u(x)$ bei beliebig gegebener Vergleichsfunktion v die Bedingungen

$$\int_a^b u N[u]\,dx > 0, \quad \int_a^b (u N[v] - v N[u])\,dx = 0$$

erfüllt, ist im allgemeinen nicht nötig, daß u selbst eine Vergleichsfunktion ist, sondern es genügt, daß u $2n$-mal stetig differenzierbar ist und einen Teil der vorgegebenen Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ erfüllt (welche und wie viele Randbedingungen das sind, kann man stets leicht durch Teilintegration, vgl. 4·3 und 4·9, feststellen). Eine Funktion, die diese Randbedingungen erfüllt und für welche $u^{(2n)}$ existiert und stetig ist, soll halbzulässig heißen. Für eine solche Funktion ist (10·7) erfüllt, und die Gleichung (10·10) ergibt für sie wegen $N_p \geqq 0$ die PARSEVALsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leqq \int_a^b u N[u]\, dx\,. \tag{10·13}$$

Zusatz 2: Als Nebenresultat liest man wegen $Z_p \geqq 0$ aus (10·9) die sogenannte BESSELsche Ungleichung ab:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 \leqq \int_a^b u M[u]\, dx\,. \tag{10·14}$$

Wir fassen die Ergebnisse dieser Nummer noch einmal zusammen:

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5) *bis* (4·8) *sei selbstadjungiert und volldefinit. Es sei* $u(x)$ *eine Vergleichsfunktion und* a_i *ihre Fourierkoeffizienten nach* (10·4). *Dann konvergieren die Reihen* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ *und* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2$, *und zwar gilt* (*Parsevalsche Gleichung, bzw. Besselsche Ungleichung*):

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \int_a^b u N[u]\, dx; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 \leqq \int_a^b u M[u]\, dx\,.$$

Ist u keine Vergleichsfunktion, sondern nur eine halbzulässige Funktion, so besteht die PARSEVAL*sche Ungleichung* (10.13).

10·4. Hilfssatz über gewisse Reihen mit Eigenfunktionen. Im folgenden benötigen wir (wieder für die selbstadjungierte volldefinite Eigenwertaufgabe (4·5) bis (4·8)) die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[y_k^{(\nu)}(x)]^2}{\lambda_k} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{10·15}$$

der Quadratsummen der ν-ten Ableitungen der Eigenfunktionen y_k, noch durch die Eigenwerte dividiert[1]); ν sei im folgenden fest gewählt.

Zum Beweise der Konvergenz betrachten wir eine Funktion $w(x)$, die m-mal stetig differenzierbar sein und die Randbedingungen

$$w(a) = w'(a) = \cdots = w^{(m-1)}(a) = w(b) = w'(b) = \cdots = w^{(m-1)}(b) = 0 \tag{10·16}$$

[1]) Der folgende Beweis wurde gegeben von E. KAMKE, Math. Z. 46 (1940) 273.

erfüllen soll, sonst aber ganz beliebig sein kann. Mit ihr bilden wir die Zahlen a_k

(10·17) $$a_k = \int_a^b \frac{y_k^{(\nu)}(x)}{\lambda_k} w(x)\,dx\,.$$

Diese Zahlen a_k lassen sich als FOURIER-Koeffizienten einer Vergleichsfunktion $v(x)$ auffassen, die als Lösung der Randwertaufgabe

$$M[v] = (-1)^\nu w^{(\nu)}(x)\,,$$
$$U_\mu[v] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2m)$$

festgelegt ist. Dieses Randwertproblem hat, da $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist, eine eindeutig bestimmte Lösung $v(x)$, die durch die GREENsche Funktion nach (5·20), (5·21) darstellbar ist:

$$v(x) = (-1)^\nu \int_a^b G(x, \xi) w^{(\nu)}(\xi)\,d\xi\,.$$

Man rechnet nun leicht die FOURIER-Koeffizienten von $v(x)$ aus:

$$\int_a^b v(x) N[y_k(x)]\,dx = \int_a^b \frac{v}{\lambda_k} M[y_k]\,dx = \int_a^b \frac{y_k}{\lambda_k} M[v]\,dx = (-1)^\nu \int_a^b \frac{y_k}{\lambda_k} w^{(\nu)}\,dx;$$

ν-malige Teilintegration unter Berücksichtigung der Randbedingungen (10·16) bestätigt, daß die FOURIER-Koeffizienten von v mit den Größen a_k von (10·17) übereinstimmen.

Die BESSELsche Ungleichung (10·14) lautet für die Vergleichsfunktion $v(x)$ und für irgendeine natürliche Zahl p:

$$\int_a^b v M[v]\,dx \geq \sum_{k=1}^p \lambda_k a_k^2 = \sum_{k=1}^p \frac{\left[\int_a^b y_k^{(\nu)}(x)\, w(x)\,dx\right]^2}{\lambda_k}$$
$$= \sum_{k=1}^p \int_a^b \int_a^b \frac{y_k^{(\nu)}(x)\, y_k^{(\nu)}(\xi)}{\lambda_k} w(x) w(\xi)\,dx\,d\xi\,.$$

Andererseits ist

$$\int_a^b v M[v]\,dx = (-1)^\nu \int_a^b v w^{(\nu)}\,dx = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) w^{(\nu)}(x) w^{(\nu)}(\xi)\,dx\,d\xi\,.$$

Wegen (10·16) ergibt ν-malige Teilintegration sowohl nach x als auch nach ξ:

$$\int_a^b v M[v]\,dx = \int_a^b \int_a^b \frac{\partial^{2\nu} G(x, \xi)}{\partial x^\nu \partial \xi^\nu} w(x) w(\xi)\,dx\,d\xi;$$

denn nach dem Zusatz in 5·3 existiert wegen $2\nu \leq 2m - 2$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{2\nu} G(x, \xi)}{\partial x^\nu \partial \xi^\nu}$$

und ist eine stetige Funktion in x und ξ. Vergleicht man die beiden Ergebnisse für $\int_a^b vM[v]\,dx$ miteinander, so erhält man

$$(10{\cdot}18) \qquad \int_a^b\int_a^b \left\{ \frac{\partial^{2\nu} G(x,\xi)}{\partial x^\nu\,\partial \xi^\nu} - \sum_{k=1}^{p} \frac{y_k^{(\nu)}(x)\,y_k^{(\nu)}(\xi)}{\lambda_k} \right\} w(x)\,w(\xi)\,dx\,d\xi \geq 0\,.$$

Da diese Ungleichung für jede Funktion $w(x)$ gelten soll, die nur m-mal stetig differenzierbar sein und die Randbedingung (10·16) erfüllen soll, ergibt sich für $x = \xi$

$$(10{\cdot}19) \qquad \left(\frac{\partial^{2\nu} G(x,\xi)}{\partial x^\nu\,\partial \xi^\nu}\right)_{x=\xi} \geq \sum_{k=1}^{p} \frac{[y_k^{(\nu)}(x)]^2}{\lambda_k}\,.$$

Denn hätte in (10·18) die geschweifte Klammer an einer Stelle $x = \xi = x_0$ einen negativen Wert, so hätte sie wegen der Stetigkeit auch in einem hinreichend kleinen Quadrat

$$|x - x_0| \leq \varepsilon\,, \quad |\xi - x_0| \leq \varepsilon$$

einen negativen Wert. Man könnte dann eine Funktion $w(x)$ so wählen, daß sie für $|x - x_0| < \varepsilon$ positive Werte annimmt und sonst verschwindet, und die Ungleichung (10·18) wäre verletzt.

Mit (10·19) ist die behauptete Konvergenz bewiesen.

10·5. Konvergenz der Fourier-Reihe (10·5). Wir können nun die erste der beiden in 10·2 aufgeworfenen Konvergenzfragen beantworten.

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5) *bis* (4·8) *sei selbstadjungiert und volldefinit. Es sei u eine Vergleichsfunktion, und mit ihr seien die Fourier-Koeffizienten* a_i *nach* (10·4) *gebildet. Dann konvergiert die mit diesen* a_i *nach* (10·5) *aufgestellte Reihe und die durch gliedweise* ν*-malige Differentiation* (ν *darf eine der Zahlen* 0, 1, 2, ..., $m - 1$ *sein) entstehende Reihe*

$$(10{\cdot}20) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,y_i^{(\nu)}(x)\,,$$

und zwar konvergiert sogar die Reihe der absoluten Beträge der Glieder gleichmäßig im Intervall a, b.

Das sieht man unmittelbar durch Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung[1]) ein; nach dieser ist für zwei natürliche Zahlen p, q

$$\left(\sum_{i=p}^{q} |a_i\,y_i^{(\nu)}(x)|\right)^2 = \left(\sum_{i=p}^{q} |a_i|\,\sqrt{\lambda_i}\cdot\frac{|y_i^{(\nu)}(x)|}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=p}^{q} a_i^2\lambda_i\right)\left(\sum_{i=p}^{q} \frac{(y_i^{(\nu)}(x))^2}{\lambda_i}\right).$$

---

[1]) K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, Leipzig 1942, Bd. I, S. 106, 133. Die SCHWARZsche Ungleichung besagt: Sind $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und $d_1, d_2, \ldots, d_n$

Hier geht auf der rechten Seite die erste Klammer nach der BESSELschen Ungleichung (10·14) gegen 0 für $p, q \to \infty$ (und zwar unabhängig von x), und die zweite Klammer bleibt nach der Formel (10·19) beschränkt, gleichmäßig in x. Also gilt auch

$$\sum_{i=p}^{q} |a_i y_i^{(\nu)}(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad p, q \to \infty$$

gleichmäßig für alle x aus dem Intervall $a \leq x \leq b$, d. h. die Reihe (10·20) konvergiert absolut und gleichmäßig in x.

10·6. Der Entwicklungssatz. Beweis im Falle $n = 0$. Nun ist noch zu untersuchen, welche Summe die Reihe (10·5) hat. Dazu ziehen wir die verallgemeinerte PARSEVALsche Formel (10·12) heran, in der v irgendeine Vergleichsfunktion mit den FOURIER-Koeffizienten b_i ist:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \int_a^b u N[v]\, dx .$$

Setzt man hier die Werte der FOURIER-Konstanten

$$b_i = \int_a^b v N[y_i]\, dx = \int_a^b y_i N[v]\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ein, so erhält man (Vertauschung von Summation und Integration ist wegen der in 10·5 bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ erlaubt)

$$\int_a^b \left\{ u(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x) \right\} N[v]\, dx = 0 .$$

Setzen wir

(10·21) $$U(x) = u(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x) ,$$

so gilt also für alle Vergleichsfunktionen $v(x)$,

(10·22) $$\int_a^b U(x) N[v]\, dx = 0 .$$

Von der Funktion $U(x)$ wissen wir: Sie ist $(m - 1)$-mal stetig differenzierbar und erfüllt von den Randbedingungen (nach der Einteilung der Randbedingungen in 4·2) alle wesentlichen Randbedingungen (denn u und y_i

---

beliebige reelle Zahlen, so gilt

$$(c_1 d_1 + \cdots + c_n d_n)^2 \leq (c_1^2 + \cdots + c_n^2)(d_1^2 + \cdots + d_n^2) .$$

Diese Ungleichung folgt unmittelbar aus der Identität

$$(c_1^2 + \cdots + c_n^2)(d_1^2 + \cdots + d_n^2) - (c_1 d_1 + \cdots + c_n d_n)^2 = \sum_{k>l} (c_k d_l - c_l d_k)^2 \geq 0$$

erfüllen diese Bedingungen). Wenn wir außerdem wüßten, daß $U(x)$ sogar $2m$-mal stetig differenzierbar und eine Vergleichsfunktion ist, so würde (10·22) besagen, daß sämtliche FOURIER-Koeffizienten u_p von $U(x)$ nach (10·4) verschwinden. Nach der PARSEVALschen Formel (10·11) müßte dann

$$\int_a^b U N[U]\, dx = 0$$

und wegen der Voraussetzung (8·2) $U \equiv 0$ sein. Damit wäre der Entwicklungssatz für eine beliebige Vergleichsfunktion $u(x)$ bewiesen.

Man kann auch ohne die unbewiesene Aussage, daß $U(x)$ eine Vergleichsfunktion sei, in vielen Fällen auf Grund der oben angegebenen Eigenschaften von $U(x)$ den Schluß auf $U(x) \equiv 0$ ziehen. Wir wollen uns hier auf den Fall einiger Probleme der Eingliedklasse beschränken, obwohl man noch etwas weitergehende Fälle behandeln kann[1]).

Die Differentialgleichung habe die spezielle Gestalt (4·22)

$$M[y] = \lambda N[y] = \lambda(-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$$

mit $g_n(x) > 0$, und unter den Randbedingungen sollen die Bedingungen (die wesentliche Randbedingungen sind)

(10·23) $$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0$$

vorkommen. Im Falle $n = 0$, also bei den speziellen Eigenwertproblemen $M[y] = \lambda g_0(x) y$, braucht über die Randbedingungen keine weitere Voraussetzung (10·23) gemacht zu werden; in diesem Falle folgt aus (10·22)

(10·24) $$\int_a^b g_0 U v\, dx = 0$$

ohnehin, daß $U \equiv 0$ sein muß, denn wäre $U \not\equiv 0$, etwa $U > 0$ an einer Stelle x_0, so wäre wegen der Stetigkeit von U auch in einem kleinen Intervall $|x - x_0| \leq \varepsilon$ die Funktion $U > 0$, und wählt man v hinreichend oft differenzierbar, $v > 0$ in $|x - x_0| < \varepsilon$ und $v = 0$ sonst, so wäre (10·24) verletzt.

Der Entwicklungssatz ist damit im Falle $n = 0$ bewiesen. Für $n > 0$ sind einige Hilfsbetrachtungen erforderlich; der Beweis des Entwicklungssatzes wird erst in 10·8 abgeschlossen.

10·7. Ein Hilfssatz von Zermelo. Im Falle eines beliebigen n in der Differentialgleichung (4·22) folgt aus (10.22) unter unseren Voraussetzungen durch n-malige Teilintegration

(10·25) $$\int_a^b g_n U^{(n)} v^{(n)}\, dx = 0\,.$$

$U^{(n)}$ existiert wegen $n \leq m - 1$ und ist stetig.

[1]) E. KAMKE, Math. Z. 46 (1940) 276—280. Eine Lücke im dortigen Beweis wird durch Verwendung der Funktionen $V(\varepsilon, h, x)$ von (10·30) geschlossen.

Diese Gleichung gilt für alle Vergleichsfunktionen v. Hieraus kann man nach einer auf ZERMELO zurückgehenden[1]) Schlußweise folgern, daß die Funktion $g_n U^{(n)}$, für die wir zur Abkürzung $\gamma(x)$ schreiben, ein Polynom P_{n-1} von höchstens $(n-1)$-tem Grade ist:

(10·26) $$\gamma(x) = g_n U^{(n)} = P_{n-1}(x).$$

Zum Beweis werden einige Hilfsbetrachtungen benötigt.

Das LAGRANGEsche Interpolationspolynom $N(x)$, welches mit einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ an n vorgeschriebenen Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ übereinstimmt, ist durch die Formel gegeben[2]):

(10·27) $$N(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{L(x) f(a_\nu)}{(x-a_\nu) L'(a_\nu)}.$$

Dabei ist $L(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ gesetzt.

Setzt man in (10·27) für $f(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ein, so stimmt $N(x)$ identisch mit $f(x)$ überein. Greift man eine weitere Stelle $x = a_0$ heraus, so läßt sich die Gleichung

$$f(a_0) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{L(a_0) f(a_\nu) \cdot}{(a_0-a_\nu) L'(a_\nu)}$$

mit

$$\varphi(x) = \prod_{\nu=0}^{n} (x-a_\nu) = (x-a_0) \cdot L(x)$$

wegen

$$\varphi'(a_0) = L(a_0), \quad \varphi'(a_\nu) = (a_\nu - a_0) L'(a_\nu) \quad \text{für} \quad \nu > 0$$

in der symmetrischen Gestalt schreiben:

(10·28) $$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} = 0.$$

Diese Beziehung wird also von jedem Polynom $f(x)$ vom $(n-1)$-ten Grade erfüllt.

Nun seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ irgendwelche Abszissen aus dem offenen Intervall a, b und $f(x)$ das Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades, das an diesen Stellen mit der Funktion $\gamma(x) = g_n U^{(n)}$ übereinstimmt. Wenn wir für beliebig gewähltes a_0 die Gleichung

(10·29) $$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\gamma(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} = 0$$

---

[1]) E. ZERMELO, Math. Ann. 58 (1904) 558—564.

[2]) G. KOWALEWSKI, Interpolation und genäherte Quadratur, Leipzig und Berlin 1932, S. 7.

beweisen können, so folgt, daß der Wert $\gamma(a_0)$ mit $f(a_0)$ übereinstimmt, d. h. $\gamma(x)$ ist selbst ein Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades, wie in (10·26) behauptet.

Zum Beweis von (10·29) wird zu den jetzt als fest angesehenen Stellen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eine Hilfsfunktion $\eta(x)$ konstruiert, die aus einem bald ersichtlichen Grunde mit $\eta = V(0, h, x)$ bezeichnet wird; h sei eine positive Zahl und $2h$ sei kleiner als die kleinste Differenz der $n+1$ Zahlen a_i und der Zahlen a und b. Nun wird $V(0, h, x)$ aus Polynomen in folgender Weise zusammengesetzt:

Intervall	$\eta = V(0, h, x)$	$\eta^{(n)}$
$a \leq x \leq a_0 - h$	$\equiv 0$	$\equiv 0$
$a_0 - h \leq x \leq a_0 + h$	$= \bar{\eta}_0(x) = \dfrac{(x - a_0 + h)^n}{\varphi'(a_0)}$	$\dfrac{n!}{\varphi'(a_0)}$
$a_0 + h \leq x \leq a_1 - h$	$= \eta_0(x) = \bar{\eta}_0(x) - \dfrac{(x - a_0 - h)^n}{\varphi'(a_0)}$	$\equiv 0$
$a_1 - h \leq x \leq a_1 + h$	$= \bar{\eta}_1(x) = \eta_0(x) + \dfrac{(x - a_1 + h)^n}{\varphi'(a_1)}$	$\dfrac{n!}{\varphi'(a_1)}$
$a_1 + h \leq x \leq a_2 - h$	$= \eta_1(x) = \bar{\eta}_1(x) - \dfrac{(x - a_1 - h)^n}{\varphi'(a_1)}$	$\equiv 0$
usw.	. . . .	. . . .
$a_n + h \leq x \leq b$	$= \eta_n(x) = \bar{\eta}_n(x) - \dfrac{(x - a_n - h)^n}{\varphi'(a_n)} \equiv 0$	$\equiv 0$

Im letzten Intervall $a_n + h \leq x \leq b$ ist $\eta \equiv 0$, denn die Funktion

$$g(\xi, x) = (x - \xi + h)^n - (x - \xi - h)^n$$

ist ein Polynom $(n-1)$-ten Grades in ξ, also gilt nach (10·28)

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{g(a_\nu, x)}{\varphi'(a_\nu)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(x - a_\nu + h)^n - (x - a_\nu - h)^n}{\varphi'(a_\nu)} = 0 .$$

Der hier dargestellte Ausdruck ist aber gerade $\eta_n(x)$, es ist also $\eta_n(x) \equiv 0$.

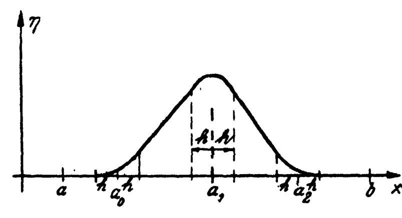


Abb. 10·1. Beispiel einer Zermeloschen Hilfsfunktion $V(o, h, x)$.

In Abb. 10·1 ist zur Erläuterung für $n = 2$ und spezielle Wahl der a_ν und h die Funktion η dargestellt.

Die so konstruierte Funktion $\eta = V(0, h, x)$ verschwindet also in den beiden äußersten Intervallen identisch und erfüllt damit sicher alle, die wesentlichen und die rest-

lichen, Randbedingungen des vorgelegten Eigenwertproblems (vgl. die Einteilung der Randbedingungen in 4·2). Aber sie ist wegen der Unstetigkeit der n-ten Ableitung noch keine Vergleichsfunktion, es müssen erst noch diese Unstetigkeiten behoben werden. Die Unstetigkeiten treten an den $2n+2$ Stellen $a_\nu \pm h$ (für $\nu = 0, 1, \ldots, n$) auf. Es sei 2ε kleiner als die kleinste Differenz dieser $2n+2$ Stellen und der Stellen a und b. Dann ändern wir in den $2n+2$ kleinen Intervallen der Länge 2ε um die Stellen $a_\nu \pm h$ die Funktion $\eta = V(0, h, x)$ in folgender Weise zu einer Funktion $V(\varepsilon, h, x)$ ab, die $2m$-mal stetig differenzierbar und damit eine Vergleichsfunktion ist.

Es sei $P(x)$ ein Polynom von höchstens $(4m+1)$-tem Grade, welches bei $x = -1$ mit seinen Ableitungen bis zur $2m$-ten Ordnung einschließlich verschwindet und welches bei $x = +1$ mit der Funktion x^n im Funktionswert und den Ableitungen bis zur $2m$-ten Ordnung übereinstimmt, also

$$P^{(\nu)}(-1) = 0 \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, 2m$$

$$P^{(\nu)}(1) = \begin{cases} \nu! \binom{n}{\nu} & \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{für } \nu = n+1, n+2, \ldots, 2m. \end{cases}$$

Dann setzen wir

$$(10{\cdot}30) \qquad V(\varepsilon, h, x) = \begin{cases} \eta_{\nu-1}(x) + \dfrac{\varepsilon^n}{\varphi'(a_\nu)} P\left(\dfrac{x - a_\nu + h}{\varepsilon}\right) \\ \qquad\qquad \text{für } a_\nu - h - \varepsilon \leq x \leq a_\nu - h + \varepsilon \\ \eta_\nu(x) - \dfrac{\varepsilon^n}{\varphi'(a_\nu)} P\left(\dfrac{x - a_\nu - h}{\varepsilon}\right) \\ \qquad\qquad \text{für } a_\nu + h - \varepsilon \leq x \leq a_\nu + h + \varepsilon \\ V(0, h, x) \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion $V(\varepsilon, h, x)$ ist für jedes positive ε, das nur genügend klein ist, so daß sich die einzelnen Intervalle der Länge 2ε nicht überdecken, eine Vergleichsfunktion und darf als Funktion v in (10·25) eingesetzt werden:

$$(10{\cdot}31) \qquad \int_a^b \gamma(x)\, V^{(n)}(\varepsilon, h, x)\, dx = 0 .$$

Gehen wir zur Grenze $\varepsilon \to 0$ über, so erhält man

$$(10{\cdot}32) \qquad \int_a^b \gamma(x)\, V^{(n)}(0, h, x)\, dx = 0 ,$$

denn $V^{(n)}(\varepsilon, h, x)$ ist von $V^{(n)}(0, h, x)$ nur in den $2n+2$ Intervallen der Länge 2ε verschieden, der Unterschied kann durch

$$K = \frac{n! + |P^{(n)}|_{\max \text{ in } (-1,1)}}{\operatorname{Min}_\nu |\varphi'(a_\nu)|},$$

also eine von ε unabhängige Schranke abgeschätzt werden; damit unterscheiden sich die Integrale auf den linken Seiten von (10·31) und (10·32) um höchstens $(2n+2)\,2\varepsilon \cdot K \cdot |\gamma|_{\max}$, und da dieser Betrag mit ε gegen Null geht, ist die Grenzwertaussage (10·32) gesichert.

Setzt man nun in (10·32) für $V^{(n)}(0, h, x)$ die in der obigen Tabelle für $\eta^{(n)}$ angegebenen Werte ein, so verschwindet der Integrand überall, außer in den $n+1$ Intervallen von $a_\nu - h$ bis $a_\nu + h$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \int_{a_\nu - h}^{a_\nu + h} \frac{n!}{\varphi'(a_\nu)} \gamma(x)\, dx = 0 .$$

Dividiert man durch $2hn!$ und geht zur Grenze $h \to 0$ über, so folgt wegen der Stetigkeit von $\gamma(x)$ die Beziehung (10·29), die bewiesen werden sollte.

10·8. Der Entwicklungssatz, Abschluß des Beweises für $n > 0$. Jetzt können die in 10·6 angefangenen Überlegungen schnell zum Ende geführt werden. Die in der vorigen Nummer 10·7 durchgeführten Hilfsbetrachtungen hatten folgendes Ergebnis geliefert: $u(x)$ sei eine Vergleichsfunktion und $U(x)$ nach (10·21) der Unterschied dieser Vergleichsfunktion $u(x)$ von der formal für $u(x)$ aufgestellten FOURIER-Reihe. Dann ist durch (10·29) bewiesen, daß die Funktion $\gamma(x) = g_n U^{(n)}$ ein Polynom P_{n-1} von höchstens $(n-1)$-tem Grade ist, vgl. (10·26). n-malige Differentiation von $\gamma(x)$ ergibt daher

$$[g_n U^{(n)}]^{(n)} = 0 .$$

Die Funktion U genügt dieser Differentialgleichung und den $2n$ Randbedingungen (10·23) und muß daher identisch verschwinden; denn sonst wäre sie eine Eigenfunktion des selbstadjungierten, die Bedingungen (8·2) erfüllenden Problems

$$(-1)^n [g_n y^{(n)}]^{(n)} = \lambda y$$

mit den Randbedingungen (10·23), und zwar gehörte sie zum Eigenwert $\lambda = 0$. Dieses Problem hat aber als volldefinites Eigenwertproblem nur positive Eigenwerte. Somit gilt der

Satz (Entwicklungssatz): *Die Eigenwertaufgabe* (4·5) *bis* (4·8) *erfülle die Voraussetzungen:*

1. *$N[y]$ hat die spezielle Gestalt $N[y] = (-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$ mit $g_n(x) > 0$.*

2. *Die Aufgabe ist selbstadjungiert, und die Bedingungen* (8·2) *der Volldefinitheit sind erfüllt.*

3. *Unter den Randbedingungen kommen die Bedingungen* (10·23) *vor:*

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0$$

Dann läßt sich jede Vergleichsfunktion $u(x)$ in eine Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln, für welche die Reihe der absoluten Beträge der Glieder

gleichmäßig im Intervall a, b konvergiert:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x),$$

wobei die a_i *durch* (10·4) *gegeben sind, und diese Gleichung darf gliedweise* $(m - 1)$*-mal differenziert werden.*

Bei speziellen Klassen von Problemen kann man zeigen, daß nicht nur die Vergleichsfunktionen, sondern alle stückweise stetigen Funktionen mit quadratisch integrierbarer erster Ableitung in Reihen nach den Eigenfunktionen entwickelt werden können[1]).

§ 11. Ergänzungen.

11·1. Elementarer Beweis der Minimaleigenschaft bei Gleichungen zweiter Ordnung. Für die speziellen Eigenwertprobleme der Gestalt

(11·1) $$-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y$$

mit den Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ kann man die Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes λ_1, die durch den Satz in 8·1 beschrieben ist, völlig elementar (ohne Benutzung von GREENscher Funktion usw.) auf Grund einer auch für manche anderen Beweise nützlichen Identität (11·6) beweisen. Da die Minimaleigenschaft die Grundlage des RITZschen Verfahrens liefert und (11·1) eine sehr oft vorkommende Differentialgleichung ist, sei hier der Beweis wiedergegeben, obwohl das Ergebnis bereits in Satz 8·2 enthalten ist.

Über eine Ausdehnung der Beweismethode auf Gleichungen vierter Ordnung vgl. die zweite Übungsaufgabe in 11·4.

Um den elementaren Charakter des Beweises zu wahren, werden hier verschiedene Dinge noch bewiesen werden, die dem geübteren Leser geläufig sind.

Über die Funktionen f_1, f_0, g_0 wird vorausgesetzt: Im Intervall $a \leq x \leq b$ seien f_1, g_0 positiv, f_0, g_0 stetig und f_1 stetig differenzierbar.

A. Existenz einer Eigenfunktion. Wir beweisen zunächst, daß mindestens ein reeller Eigenwert vorhanden ist und daß die zum kleinsten reellen Eigenwert λ_1 zugehörige Eigenfunktion y_1 in $a < x < b$ von Null verschieden ist, also etwa als positiv angenommen werden kann.

Eine Eigenfunktion y von (11·1) kann nur einfache Nullstellen haben; denn wäre etwa für $x = x_0$:

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0,$$

[1]) Vgl. Fußnote 1 von S. 108, insbesondere a. a. O. S. 371.

so müßte y als durch Anfangswerte eindeutig festgelegtes Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit $f_1 \neq 0$ identisch verschwinden. Insbesondere muß also $y'(a) \neq 0$ sein.

Wir denken uns die nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Eigenfunktion jetzt durch die Bedingung $y'(a) = 1$ festgelegt. Nun betrachten wir die Lösung $z(x, \Lambda)$ der Anfangswertaufgabe:

$$(11{\cdot}2) \qquad \begin{cases} -(f_1 z')' + f_0 z = \Lambda g_0 z \\ z(a) = 0, \; z'(a) = 1 . \end{cases}$$

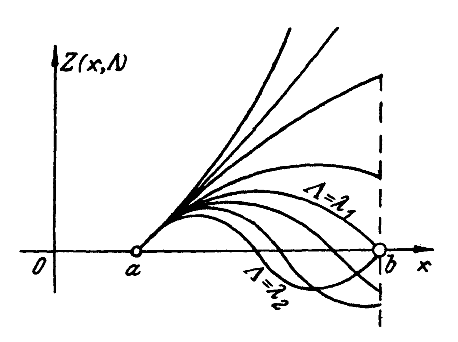


Abb. 11·1. Verlauf von $z(x, \Lambda)$ für verschiedene Werte von Λ.

Für jedes reelle Λ ist $z(x, \Lambda)$ hierdurch eindeutig festgelegt (vgl. Abb. 11·1), und diejenigen Werte von Λ, für die $z(b, \Lambda) = 0$ wird, sind die Eigenwerte λ von (11·1). In einer hinreichend kleinen rechtsseitigen Umgebung von $x = a$ ist $z(x, \Lambda)$ für jedes feste Λ positiv (denn gäbe es kein solches Intervall, wäre also $x = a$ Häufungspunkt von Stellen mit $z \leq 0$, so müßte auch $z'(a) \leq 0$ sein[1])).

Für sehr große negative Werte von Λ ist $z(x, \Lambda)$ im ganzen Intervall $a < x \leq b$ positiv; denn für

$$(11{\cdot}3) \qquad \Lambda < - \frac{|f_0(x)|_{\max}}{(g_0(x))_{\min}}$$

ist $f_0 - \Lambda g_0 > 0$; wäre nun $z(x, \Lambda)$ nicht für alle $x > a$ positiv, so müßte $z(x, \Lambda)$ eine erste auf a folgende Nullstelle $x = \xi > a$ besitzen, dort wäre $z' < 0$, während aus (11·2) durch Integration von a bis ξ folgen würde:

$$f_1 z'(\xi) = f_1(a) \cdot 1 + \int_a^\xi (f_0 - \Lambda g_0) z(x)\, dx > 0 .$$

Nun ist $z(x, \Lambda)$ als Funktion von Λ stetig (sogar differenzierbar) und für jedes feste Λ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von x. Be-

[1]) Man kann auch leicht (z. B. unter Benutzung der zu (11·4) führenden Transformation und Vergleich mit der Differentialgleichung (11·5) mit konstanten Koeffizienten) positive Konstanten c_1 und c_2 so angeben, daß $z(x, \Lambda) > 0$ ist für

$$a < x \leq a + c_1(c_2 + |\Lambda|)^{-\frac{1}{2}};$$

vgl. hierzu J. Horn, Gewöhnliche Diffgl. 2. Aufl. Berlin und Leipzig 1927, S. 93.

trachten wir $z(x, \Lambda)$ für von $-\infty$ an anwachsendes Λ, so ist zuerst z für $a < x \leq b$ positiv. Es sind nun folgende zwei Fälle denkbar:

I. $z(x, \Lambda)$ ist für alle Λ und alle x aus $a < x \leq b$ positiv.

II. $z(x, \Lambda)$ ist nicht für alle Λ und alle x aus $a < x \leq b$ stets positiv.

Da für genügend stark negative Λ (z. B. für die Λ mit (11·3)) $z > 0$ ist für $a < x \leq b$, muß es im zweiten Fall wegen der Stetigkeit von z und z' in x und Λ ein kleinstes $\Lambda = \Lambda_1$ geben, für das erstmalig $z = 0$ wird für ein $x = x_0$ mit $a < x_0 \leq b$, also $z(x_0, \Lambda_1) = 0$ und $z(x, \Lambda) > 0$ für $\Lambda < \Lambda_1$ und $a < x \leq b$. (Nennt man x_Λ die erste auf a folgende Nullstelle von $z(x, \Lambda)$, so ist $z'(x_\Lambda, \Lambda) < 0$, also können sich die x_Λ für $\Lambda \to \Lambda_1$ wegen der Stetigkeit von z' und $z'(a, \Lambda) = 1$ der Stelle a nicht beliebig nähern.)

In diesem Fall kann nur $x_0 = b$, also $z(b, \Lambda_1) = 0$ sein und $z(x, \Lambda_1) > 0$ für $a < x < b$, d. h. Λ_1 ist der kleinste Eigenwert λ_1 und die zugehörige Eigenfunktion ist positiv für $a < x < b$. Denn wäre $z(x_0, \Lambda_1) = 0$ mit $a < x_0 < b$, so wie in Abb. 11·2, so müßte, da $z(x, \Lambda_1) \geq 0$ für alle anderen x des Intervalls $a < x \leq b$ ist, $z'(x_0, \Lambda_1) = 0$ sein; es kann aber nicht z und z' zugleich an derselben Stelle x_0 verschwinden, wie oben für y dargelegt wurde.

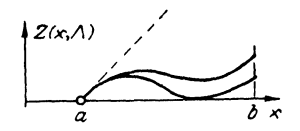


Abb. 11·2. Zum Beweise in 11·1.

Es ist mithin nur noch zu zeigen, daß bei der Fallunterscheidung der Fall I nicht auftritt.

Wir führen an Stelle von x eine neue unabhängige Veränderliche ξ ein durch

$$\xi = \xi(x) = \int\limits_a^x \frac{dt}{f_1(t)}.$$

Das x-Intervall a, b wird dabei wegen $f_1(x) > 0$ umkehrbar eindeutig auf das Intervall $0, \xi(b)$ der ξ-Achse abgebildet; setzt man

$$z(x(\xi)) = w(\xi); \quad f_0(x(\xi)) = F_0(\xi); \quad f_1(x(\xi)) = F_1(\xi); \quad g_0(x(\xi)) = G_0(\xi),$$

so geht die Anfangswertaufgabe (11·2) wegen $\frac{dx}{d\xi} = f_1(x) = F_1(\xi)$ und $\frac{dw}{d\xi} = f_1(x)\, z'(x)$, wenn nunmehr in diesem Abschnitt 11·1 A Striche Ableitungen nach ξ bedeuten, über in

$$(11\cdot4) \qquad \begin{aligned} w'' &= -s(\xi) w(\xi) = F_1(\xi)\,[F_0(\xi) - \Lambda G_0(\xi)]\, w(\xi) \\ w(0) &= 0, \quad w'(0) = F_1(0). \end{aligned}$$

In dem Falle I der Fallunterscheidung müßte nun $w(\xi, \Lambda)$ für alle Λ und für alle ξ aus $0 < \xi \leq \xi(b)$ positiv sein, wir zeigen jedoch, daß dies nicht

mehr zutrifft für großes positives Λ. Dazu vergleichen wir $w(\xi, \Lambda)$ mit der Lösung $v(\xi) = \frac{1}{k} F_1(0) \sin k\xi$ der Differentialgleichung

$$v'' = -k^2 v \tag{11·5}$$

mit denselben Anfangsbedingungen $v(0) = 0$, $v'(0) = F_1(0)$.

Die nächste auf $\xi = 0$ folgende Nullstelle von $v(\xi)$ ist $\xi = \frac{\pi}{k}$; wir betrachten jetzt nur noch das Intervall $0 \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{k}$, das wir mit J bezeichnen, und wählen $k > \frac{\pi}{\xi(b)}$, so daß J in $0, \xi(b)$ enthalten ist.

Wir wählen ferner Λ so groß, daß $s(\xi) > k^2$ ist für alle ξ aus dem Intervall J, wir brauchen dafür nur

$$\Lambda > \frac{k^2 + \operatorname{Max}(F_1 |F_0|)}{\operatorname{Min}(F_1 G_0)}$$

zu setzen. Multiplizieren wir die erste Gleichung (11·4) mit v, (11·5) mit w, so lautet die Differenz

$$w''v - v''w = -(s(\xi) - k^2) v w .$$

Wäre nun $w > 0$ für alle ξ im Innern von J, so wäre dort die rechte Seite der letzten Gleichung negativ und daher auch das über dieses Intervall von 0 bis ξ erstreckte Integral

$$w'v - v'w = -\int_0^\xi (s(\xi) - k^2)\, v w \, d\xi < 0 \qquad (\text{für } \xi > 0 \text{ aus } J)$$

Für $\xi = \frac{\pi}{k}$ folgt wegen $v = 0$, $v' = -F_1(0) < 0$ hieraus $w\left(\frac{\pi}{k}\right) < 0$ im Widerspruch zur Annahme $w > 0$. Es kann also nicht $w(\xi, \Lambda)$ und daher auch nicht $z(x, \Lambda)$ für alle x mit $a < x \leqq b$ und alle Λ positiv sein, und damit ist die Existenz eines kleinsten reellen Eigenwertes λ_1 und einer im Intervall $a < x < b$ positiven ersten Eigenfunktion gezeigt.

B. Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes. Der Beweis für die Minimaleigenschaft von λ_1 beruht nun auf der folgenden Identität für irgend drei Funktionen u, f, y, für die nur u', f', y'' an einer betrachteten Stelle x existieren müssen und $y(x) \neq 0$ ist:

$$\left(\frac{u^2 f y'}{y}\right)' = \frac{u^2 (f y')'}{y} + u'^2 f - f y^2 \left(\frac{u}{y}\right)'^2 \tag{11·6}$$

Man bestätigt diese Identität durch Nachrechnen:

$$\left(\frac{u^2 f y'}{y}\right)' = \frac{u^2}{y}(f y')' + \frac{2 u u' f y'}{y} - \frac{u^2 f y'^2}{y^2}$$
$$= \frac{u^2}{y}(f y')' + u'^2 f - f\left(u'^2 - 2\frac{u u' y'}{y} + \frac{u^2 y'^2}{y^2}\right),$$

woraus (11·6) unmittelbar folgt.

Nun sei u eine beliebige „zulässige Funktion", d. h. eine nicht identisch verschwindende, die Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ erfüllende, stetig differenzierbare Funktion (es würde sogar genügen, an Stelle der stetigen Differenzierbarkeit nur zu verlangen, daß u stückweise stetig differenzierbar ist und daß $u'(a)$ und $u'(b)$ existieren). Ferner setzen wir in der Identität $f = f_1$ und y gleich der ersten Eigenfunktion y_1, deren Existenz bereits bewiesen wurde. Dann ist also nach (11·1)

$$\frac{(f_1 y_1')'}{y_1} = f_0 - \lambda_1 g_0 .$$

Integrieren wir (11·6) über das Intervall a, b, so verschwindet die linke Seite; denn y_1' verschwindet nicht an den Randstellen, folglich hat $\frac{u}{y_1}$ an den Randstellen endliche Grenzwerte und $\frac{u^2}{y_1}$ den Grenzwert Null. Auf der rechten Seite hat $y_1\left(\frac{u}{y_1}\right)' = u' - y_1' \frac{u}{y_1}$ an den Randstellen endliche Grenzwerte, so daß bei Integration das Integral existiert. Somit erhält man bei der Integration

$$\int_a^b u^2(f_0 - \lambda_1 g_0)\, dx + \int_a^b u'^2 f_1\, dx - \int_a^b f_1 y_1^2 \left(\frac{u}{y_1}\right)'^2 dx = 0$$

Das dritte Integral hat nun, da y_1 außer bei $x = a$ und $x = b$ im Integrationsintervall keine weiteren Nullstellen besitzt, wie oben gezeigt wurde, einen endlichen (und wegen $f_1 > 0$) nichtnegativen Wert. Den Wert 0 hat das dritte Integral dann und nur dann, wenn $\left(\frac{u}{y_1}\right)' \equiv 0$, d. h. wenn u selbst eine erste Eigenfunktion ist. Läßt man das dritte Integral fort, so hat man also das Gleichheitszeichen durch $\geq$ zu ersetzen, und man erhält

$$(11·7) \qquad \lambda_1 \leq \frac{\int_a^b (f_1 u'^2 + f_0 u^2)\, dx}{\int_a^b g_0 u^2\, dx};$$

d. h. also der kleinste reelle Eigenwert λ_1 ist zugleich der kleinste Wert, den der in (11·7) rechtsstehende Quotient annehmen kann, wenn u den Bereich aller zulässigen Funktionen durchläuft; das Gleichheitszeichen steht dabei nur dann, wenn u selbst eine erste Eigenfunktion ist.

Für den zweiten Eigenwert λ_2 würde man mittels der hier beschriebenen Beweismethode die Aussage erhalten: Ist ξ die im Innern von a, b gelegene Nullstelle der zweiten Eigenfunktion y_2, also $y_2(\xi) = 0$, so ist λ_2 das Minimum, das der in (11·7) rechtsstehende Quotient annehmen kann, wenn man von der zulässigen Funktion noch zusätzlich fordert, an der Stelle ξ zu ver-

schwinden, also $u(\xi) = 0$. Die Nebenbedingung ist also jetzt eine andere als bei dem Satze in 8·3.

C. Einschließungssatz für den ersten Eigenwert. Wir schließen einen elementaren, von J. BARTA gegebenen[1]) Beweis für einen Spezialfall des Einschließungssatzes an, der eine von der Identität (11·6) etwas abweichende Identität (11·8) benutzt. Diese lautet für irgend drei Funktionen u, f, y, für die nur u'', f', y'' an einer betrachteten Stelle x existieren müssen und $u(x) \neq 0$ ist:

$$(11\cdot8) \qquad (fy')' = \frac{y}{u}(fu')' - \frac{1}{u}\Big[f(u'y - uy')\Big]'.$$

Von der Richtigkeit dieser Identität überzeugt man sich leicht durch Ausdifferenzieren der eckigen Klammer.

Nun sei u eine beliebige Vergleichsfunktion, d. h. eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $u(a) = u(b) = 0$, die jedoch im Innern des Intervalls nur positive Werte annimmt:

$$u(x) > 0 \quad \text{für} \quad a < x < b .$$

Ferner setzen wir in (11·8) für f die Funktion f_1 von (11·1) und für y die erste Eigenfunktion y_1 ein, von der wir bereits wissen, daß sie im Innern nicht verschwindet, also etwa $y_1 > 0$ für $a < x < b$; dann ist nach (11·1)

$$(f_1 y_1')' = f_0 y_1 - \lambda_1 g_0 y_1 ,$$

und (11·8) geht nach Division durch $g_0 y_1$ über in

$$(11\cdot9) \qquad \lambda_1 = \frac{f_0}{g_0} - \frac{(f_1 u')'}{g_0 u} + \frac{Z}{g_0 u y_1}$$

mit

$$(11\cdot10) \qquad Z = Z(x) = [f_1(u' y_1 - u y_1')]' .$$

Führen wir nun bei gegebener Funktion u für $a < x < b$ die Hilfsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{-(f_1 u')' + f_0 u}{g_0 u} = \frac{M[u]}{N[u]}$$

ein, so nimmt (11·9) die Gestalt an:

$$(11\cdot11) \qquad \lambda_1 = \Phi(x) + \frac{Z}{g_0 u y_1} .$$

Nun ist $Z(x)$ nach (11·10) eine stetige Funktion, deren Integral über das Grundgebiet wegen der Randbedingungen für u und y_1 verschwindet:

$$\int_a^b Z(x)\,dx = [f_1(u' y_1 - u y_1')]_a^b = 0 .$$

Es ist also entweder $Z \equiv 0$ oder Z nimmt für $a < x < b$ Werte beiderlei Vorzeichens an. Da g_0, u, y_1 für $a < x < b$ positiv angenommen wurden, ist

[1]) J. BARTA, Ing.-Arch. 8 (1937) 35—37.

auch die Funktion $\frac{z}{g_0 u y_1}$ entweder identisch Null oder nimmt Werte beiderlei Vorzeichens an. Es kann also in (11·11) die Funktion $\lambda_1 - \Phi(x)$ nicht für alle x aus $a < x < b$ dauernd positiv oder dauernd negativ sein, d. h. mit anderen Worten

$$\Phi_{\min} \leqq \lambda_1 \leqq \Phi_{\max}.$$

Das ist die Aussage des Einschließungssatzes in 9·1 für den ersten Eigenwert λ_1 von (11·1).

11·2. Minimaleigenschaften der Eigenwerte bei partiellen Differentialgleichungen. Es sei

$$M[z] = \lambda g_0 z \tag{11·12}$$

eine partielle Differentialgleichung für eine Funktion z von zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$; g_0 sei eine gegebene stetige positive Funktion dieser Veränderlichen, und für z seien am Rande eines gewissen Gebietes $\mathfrak{B}$ Randbedingungen

$$U_\mu[z] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k) \tag{11·13}$$

wie in (6·2) vorgeschrieben. Diese Eigenwertaufgabe sei selbstadjungiert und volldefinit, vgl. (6·3) und (6·4), es existiere eine GREENsche Funktion[1]) $G(x, y, \ldots; \xi, \eta, \ldots)$ und ein mit ihr nach (7·24) zusammenhängender Kern

$$K(x, y, \ldots; \xi, \eta, \ldots) = G(x, y, \ldots; \xi, \eta, \ldots)\sqrt{g_0(x, y, \ldots)\, g_0(\xi, \eta, \ldots)}, \tag{11·14}$$

der symmetrisch, quadratisch integrabel und von mittlerer Stetigkeit ist, so daß die in 7·2 wiedergegebene Theorie der Integralgleichungen anwendbar ist.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich die ganze in 8·1 bis 8·4 gegebene Theorie der Minimaleigenschaften der Eigenwerte fast wörtlich auf die partiellen Differentialgleichungen (11·12) übertragen, wir können uns daher kurz fassen. Es sei $u(x, y, \ldots)$ eine Vergleichsfunktion, d. h., vgl. 6·1, eine so oft partiell differenzierbare Funktion, wie es zur Bildung von $M[u]$ gebraucht wird, und $U_\mu[u] = 0$, $u \not\equiv 0$. Dann kann man mit ihr den RAYLEIGHschen Quotienten

$$R[u] = \frac{\int\limits_{\mathfrak{B}} u\, M[u]\, dx\, dy \cdots}{\int\limits_{\mathfrak{B}} g_0 u^2\, dx\, dy \cdots} \tag{11·15}$$

[1]) D. h. es ist $M[z] = r(x, y, \ldots)$, $U_\mu[z] = 0$ gleichwertig mit

$$z(x, y, \ldots) = \int\limits_{\mathfrak{B}} G(x, y, \ldots; \xi, \eta, \ldots)\, r(\xi, \eta, \ldots)\, d\xi\, d\eta \cdots.$$

und die (8·4) entsprechende[1]) Funktion η^*

$$M[u] - Rg_0 u = \eta^*(x, y) \tag{11·16}$$

bilden.

Zum Beweis von $R[u] \geq \lambda_1$ kann man wieder $\eta^* \not\equiv 0$ voraussetzen. Dann ist die Lösung des (8·5) entsprechenden Randwertproblems

$$M[v] - \lambda g_0 v = \eta^*, \quad U_\mu[v] = 0,$$

gegeben durch

$$v(x, y, \lambda) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta)\,[\lambda g_0(\xi, \eta) v(\xi, \eta, \lambda) + \eta^*(\xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta,$$

d. h. die Funktion $V(x, y) = v(x, y, \lambda)\sqrt{g_0(x, y)}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$V(x, y) = \lambda \iint\limits_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta)\, V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + f(x, y)$$

mit

$$f(x, y) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta)\sqrt{g_0(x, y)}\,\eta^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{11·17}$$

solange λ kein Eigenwert ist, und zwar kann man $V(x, y)$ nach der allgemeinen Lösungsformel (7·15), die auch bei Funktionen mehrerer Veränderlicher gilt, unmittelbar hinschreiben:

$$\left\{\begin{aligned} v(x, y, \lambda)\sqrt{g_0(x, y)} &= f(x, y) \\ &+ \lambda \iint\limits_{\mathfrak{B}} \left[K(x, y; \xi, \eta) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i(x, y) z_i(\xi, \eta)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} \cdot \sqrt{g_0(x, y)\, g_0(\xi, \eta)}\right] f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \end{aligned}\right. \tag{11.18}$$

wobei $z_i(x, y)\sqrt{g_0(x, y)}$ die Eigenfunktionen des Kernes K, also $z_i(x, y)$ die Eigenfunktionen von (11·12), (11·13) sind.

Nun kann man genau wie in (8·7)

$$h(\lambda) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \eta^*(x, y) v(x, y, \lambda)\, dx\, dy$$

bilden und den weiteren Beweis wie in 8·2 mit $N[u] = g_0 u$ führen.

Auch der Beweis für die Minimaleigenschaft des zweiten Eigenwertes λ_2 in 8·3 läßt sich genau übertragen; der Nebenbedingung (8·11) entspricht hier die Nebenbedingung

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}} u(x, y) g_0(x, y) z_1(x, y)\, dx\, dy = 0; \tag{11·19}$$

nur der Nachweis, daß infolge dieser Nebenbedingung die Singularität in der GREENschen Funktion bei $\lambda = \lambda_1$ unschädlich wird, muß hier an Hand der

[1]) Wir schreiben η^* an Stelle des in (8·4) benutzten η, weil η hier, z. B. (11·14), in anderer Bedeutung auftritt. Wir sparen uns weiterhin die Punkte hinter x, y bzw. ξ, η.

Lösungsformel (11·18) geführt werden. Dort fällt in der Summe das für $\lambda = \lambda_1$ unendlich werdende Glied heraus, wenn

(11.20) $$\iint_{\mathfrak{B}} z_1(\xi, \eta) \sqrt{g_0(\xi, \eta)} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0$$

ist. Nun ist tatsächlich (11·20) eine Folge von (11·19); denn wegen $M[z_1] = \lambda_1 g_0 z_1$ ist nach (11·19) und wegen der vorausgesetzten Selbstadjungiertheit

$$\iint_{\mathfrak{B}} u(x, y) M[z_1(x, y)]\, dx\, dy = \iint_{\mathfrak{B}} z_1(x, y) M[u(x, y)]\, dx\, dy = 0\,,$$

mithin nach (11·16) und (11·19)

$$\iint_{\mathfrak{B}} z_1(x, y) \eta^*(x, y)\, dx\, dy = 0\,.$$

Setzt man hier die aus (11·12) für z_1 folgende Gleichung

$$z_1(x, y) = \lambda_1 \iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) g_0(\xi, \eta) z_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ein, so entsteht

$$\iint_{\mathfrak{B}} z_1(\xi, \eta) \sqrt{g_0(\xi, \eta)} \left[\iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) \sqrt{g_0(\xi, \eta)} \eta^*(x, y)\, dx\, dy\right] d\xi\, d\eta = 0,$$

eine Gleichung, die mit (11·17) unmittelbar in (11·20) übergeht.

Allgemein ergibt sich für den n-ten Eigenwert λ_n: Es ist λ_n das Minimum des RAYLEIGHschen Quotienten $R[u]$, Gl. (11·15), wenn u den Bereich aller Vergleichsfunktionen durchläuft, die zu den mit g_0 multiplizierten $(n - 1)$ ersten Eigenfunktionen $z_i\,(x, y)$ orthogonal sind:

(11·21) $$\iint_{\mathfrak{B}} u g_0 z_i\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - 1)\,.$$

Diesem Variationsprinzip läßt sich noch ein zweites an die Seite stellen. Das in 7·2 bei den Integralgleichungen genannte Variationsprinzip besagt nach (7·18)

(11·22) $$\lambda_1 = \mathrm{Min} \frac{\iint_{\mathfrak{B}} w^2(x, y)\, dx\, dy}{\iint_{\mathfrak{B}} \iint_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta)\, w(x, y)\, w(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta}\,,$$

wobei w den Bereich der (nicht normierten) stetigen Funktionen durchläuft. Zu w wird eine Vergleichsfunktion $F_1(x, y)$ bestimmt, die der Differentialgleichung

(11·23) $$w = \frac{1}{\sqrt{g_0}} M[F_1]:$$

genügt, also

(11·24) $$F_1(x, y) = \iint_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta) \frac{w(\xi, \eta)}{\sqrt{g_0(x, y)}}\, d\xi\, d\eta$$

Damit wird

$$(11\cdot25)\qquad \lambda_1 = \mathrm{Min}\,\frac{\iint\limits_{\mathfrak{B}} \frac{1}{g_0(x,y)}(M[F_1])^2\,dx\,dy}{\iint\limits_{\mathfrak{B}} F_1(x,y)\,M[F_1]\,dx\,dy},$$

wobei F_1 den Bereich aller Vergleichsfunktionen durchläuft.

Der rechtsstehende Quotient hat eine andere Gestalt als in (11·15). Auf die Stellung dieser beiden Minimalprinzipien[1]) zueinander kommen wir in 14·1 noch zurück.

Auch den Einschließungssatz von § 9 kann man unmittelbar auf die partielle Differentialgleichung übertragen; wir benutzen die Formeln (7·16), (7·17) der Integralgleichungstheorie und setzen wie bei (11·23).

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\,M[F_1],$$

so daß wir (11·24) mit v an Stelle von w übernehmen können; dann geht (7·16) über in

$$(11\cdot26)\qquad \Phi(x,y) = \frac{M[F_1(x,y)]}{g_0(x,y)\,F_1(x,y)}.$$

Diesen Quotienten $\Phi(x, y)$ kann man für eine beliebige Vergleichsfunktion $F_1(x, y)$ bilden. Hat Φ im Bereich $\mathfrak{B}$ ein festes Vorzeichen, und liegt Φ zwischen endlichen Grenzen $\Phi_{\min}$ und $\Phi_{\max}$, so liegt zwischen $\Phi_{\min}$ und $\Phi_{\max}$ mindestens ein Eigenwert λ_k.

11·3. Zweiparametrige Eigenwertprobleme, Eigenkurven. Es kommt verschiedentlich vor, daß bei einem Eigenwertproblem zwei Parameter auftreten, daß man z. B. den Einfluß einer in der Differentialgleichung auftretenden Größe a auf die Eigenwerte λ zu untersuchen wünscht oder dergleichen. Bezeichnet man die beiden Parameter mit λ_1 und λ_2, also in dem eben genannten Fall etwa $\lambda = \lambda_1$ und $a = \lambda_2$, so wird es im allgemeinen zu jedem λ_1 eine Folge von abzählbar unendlich vielen Werten von λ_2 geben, und bei graphischer Darstellung in einer λ_1, λ_2-Ebene erhält man abzählbar unendlich viele Äste von „Eigenkurven“[2]). (Die Bezeichnungsweise ist hierbei gegenüber dem Früheren geändert, in 5·7 bedeutete λ_i den i-ten Eigenwert.)

---

[1]) Auf das Vorhandensein zweier Minimalprinzipien wird hingewiesen bei G. Hamel, Integralgleichungen, Berlin 1937, S. 88.

[2]) In Spezialfällen wurden Eigenschaften von Eigenkurven untersucht von H. Schaefer, Beitrag zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes eindimensionaler Eigenwertaufgaben, Diss., Hannover 1937, S. 6.

Als Beispiel[1]) sei der elastisch gebettete, beiderseits eingespannte Druckstab genannt, bei dem die Bettungszahl als veränderlicher Parameter aufgefaßt werde. Das Problem lautet dann

$$y^{\mathrm{IV}} = \lambda_1 y - 2\lambda_2 y'',$$
$$y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0.$$

Bei λ_2 ist der Faktor 2 nur aus Gründen der Bequemlichkeit bei der Rechnung hinzugefügt worden. Die Durchrechnung der Aufgabe führt auf eine transzendente Gleichung, die sich mit

$$K_1^2 = \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2^2},$$
$$K_2^2 = -\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2^2},$$
$$2\sigma = K_1 l; \quad 2\tau = K_2 l$$

aufspalten läßt in

$$\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\sigma} = \frac{\mathfrak{Tg}\,\tau}{\tau}$$

und

$$\sigma \operatorname{tg}\sigma = -\tau\,\mathfrak{Tg}\,\tau.$$

Abb. 11·3 zeigt die ersten drei Äste der zugehörigen Eigenkurve.

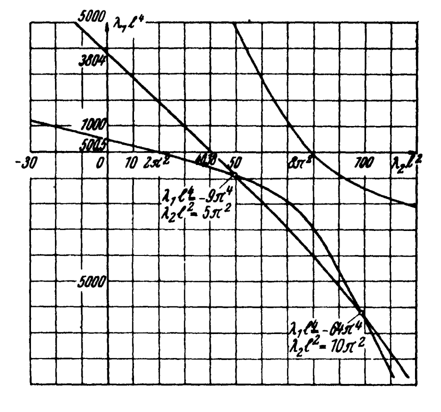


Abb. 11·3. Eigenkurven zum Problem
$y^{\mathrm{IV}} = \lambda_1 y - 2\lambda_2 y''$;
$y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$.

11·4. Vermischte Übungsaufgaben zum dritten Kapitel. 1. Man prüfe die Parsevalsche Formel (10·11) und die Besselsche Ungleichung (10·14) nach an dem Beispiel $-y'' = \lambda y$; $y(0) = y(\pi) = 0$ für die Vergleichsfunktion $u = \pi x - x^2$.

Nachrechnung: Wie bereits in 10·2 angegeben, hat man hier die Eigenwerte $\lambda_k = k^2$ mit den normierten Eigenfunktionen $y_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$. Die Fourier-Konstanten a_k der Funktion $u(x)$ berechnen sich nach

$$a_k = \int_0^\pi u(x)\,y_k(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin kx\,dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{4}{k^3} & \text{für ungerades } k, \\ 0 & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

[1]) In der technischen Literatur gibt es viele Beispiele zweiparametriger Eigenwertprobleme; es sei nur das bekannte Beispiel der gedrückten und tordierten homogenen Welle genannt (C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, S. 547). Hier sind Torsionsmoment W und axiale Druckkraft P die beiden Parameter. Die Knickbedingung ist eine quadratische Beziehung zwischen W und P, und das sog. Knickdiagramm zeigt eine Parabel in einer P-W-Ebene als einen Ast der Eigenkurve.

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{32}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^6} = \frac{\pi^5}{30}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^2 = \frac{32}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^4} = \frac{\pi^3}{3}.$$

Diese Werte stimmen überein mit

$$\int_0^\pi u N[u]\,dx = \int_0^\pi (\pi x - x^2)^2\,dx = \frac{\pi^5}{30} \text{ und } \int_0^\pi u M[u]\,dx = \int_0^\pi 2(\pi x - x^2)\,dx = \frac{\pi^3}{3}.$$

2. Man übertrage die in 11·1 beschriebene elementare Beweismethode für die Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes auf die Probleme vierter Ordnung:

$$(f_2 y'')'' = \lambda g_0 y$$

mit den Randbedingungen

$$y(a) = y''(a) = y(b) = y''(b) = 0.$$

Dabei seien g_0, f_2 positiv, g_0 stetig, f_2 zweimal stetig differenzierbar.

Anleitung: An Stelle der Identität (11·6) benutze man hier die Identität

$$\left(\frac{u^2 f y''}{y}\right)'' = \left[\frac{2u^2}{y}(f y'')'\right]' + \frac{2 f y''}{y^3}(u' y - u y')^2 - \frac{f}{y^2}(u'' y - u y'')^2$$
$$- \frac{u^2}{y}(f y'')'' + f u''^2;$$

man setze hier ein: u als „zulässige Funktion“, d. h. als zweimal stetig differenzierbare Funktion, die die wesentlichen Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ erfüllt, $f = f_2$, $y = y_1$. Dabei ist y_1 die erste Eigenfunktion, von der man die Eigenschaften benutzt: $y_1 > 0$ und $y_1'' < 0$ für $a < x < b$, y_1' und y_1''' verschwinden nicht an den Randstellen a, b. Der Beweis ist (mit anderen Bezeichnungen) durchgeführt in einer Arbeit des Ve f. in „Deutsche Mathematik“, Bd. 2 (1937), S. 205.

3. Einschließungssatz: Man schließe die Knicklast P für einen bei $x = \pm 1$ gelenkig gelagerten, elastisch gebetteten Druckstab (Bettungsziffer $K = 60c$) mit der veränderlichen Biegesteifigkeit $\alpha = c(3 - x^2)$ (Abb. 11·4) in Schranken ein.

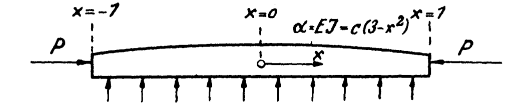


Abb. 11·4. Elastisch gebetteter Druckstab.

Mit $P = c\lambda$ lautet das Problem nach 1·4:

$$M[y] = [(3 - x^2) y'']'' + 60 y = -\lambda y'',$$
$$y(-1) = y''(-1) = y(+1) = y''(+1) = 0.$$

Man setzt zwei Polynome $F_0(x)$ und $F_1(x)$ an, die die Randbedingungen erfüllen und in der Beziehung $M[F_1] = -F''$ stehen, und erhält

$$(11\cdot27)\qquad \begin{cases} F_1 = 39 - 45x^2 + 5x^4 + x^6, \\ 14F_0 = 5(3433 - 4032x^2 + 546x^4 + 56x^6 - 3x^8). \end{cases}$$

Nach (9·3) bildet man den Quotienten

$$\Phi(x) = \frac{F_0'(x)}{F_1'(x)} = \frac{30\left(48 - 13x^2 - 2x^4 + \frac{1}{7}x^6\right)}{45 - 10x^2 - 3x^4}.$$

$\Phi(x)$ nimmt seine Extremwerte bei $x = 0$ und $x = \pm 1$ an:

$$\Phi(0) = 32; \quad \Phi(1) = 31\frac{1}{14} \approx 31{,}07;$$

man weiß also nach (9·4) $31{,}07 \leq \lambda \leq 32$.

Engere Schranken sind für dieses Beispiel nach der Formel (12·19) in Aufgabe 2 von 14·6 berechnet.

4. Einschließungssatz: Das Eigenwertproblem

$$-(e^{-x^2}y')' = \lambda e^{-x^2}y,$$
$$y(0) = y'(1) = 0$$

tritt auf bei Torsionsschwingungen von Scheiben veränderlicher Dicke, vgl. (2·26) Die Randbedingungen entsprechen einem festen Innen- und einem freien Außenrande. Eine die Randbedingungen erfüllende Funktion ist

$$w = e^{\frac{1}{2}x^2} \sin a_n x,$$

wenn man die Zahl a_n so wählt, daß $\operatorname{tg} a_n + a_n = 0$ ist.

Nach (9·6) berechnet man

$$\Phi = \frac{-(e^{-x^2}w')'}{e^{-x^2}w} = a_n^2 + x^2 - 1$$

und daraus nach (9·7)

$$a_n^2 - 1 \leq \lambda_n \leq a_n^2.$$

Für die ersten vier Eigenwerte erhält man so die Schranken

n	a_n	Untere Schranke für λ_n	Obere Schranke für λ_n
1	2,029	3,116	4,116
2	4,913	23,14	24,14
3	7,978	62,65	63,65
4	11,09	121,9	122,9

Die Schranken werden für die höheren Eigenwerte prozentual gerechnet immer enger. Für die niedrigeren Eigenwerte vgl. Aufgabe 2 in 21·6 oder Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 304 und 306.

5. Einschließungssatz: Die Bestimmung der Knicklast für einen elastisch gebetteten, gelenkig gelagerten Druckstab konstanten Querschnittes führt auf

$$y^{IV} + Ay = -\lambda y'',$$
$$y(-1) = y''(-1) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Man schließe λ_1 für $A = 20$ in Schranken ein.

Durchrechnung: Zur Aufstellung zweier Funktionen $F_0(x)$, $F_1(x)$, die beide alle Randbedingungen und $F_1^{IV} + AF_1 = -F_0''$ erfüllen, gehen wir aus von einer Funktion $F_1(x)$, für die F_1, F_1'' und F_1^{IV} an den Randstellen $x = \pm 1$ verschwinden (denn aus $F_1 = F_0'' = 0$ folgt auch das Verschwinden von F_1^{IV}). Das Polynom niedrigsten Grades, das diese Bedingung erfüllt, ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt zu

$$F_1(x) = 61 - 75x^2 + 15x^4 - x^6 = (1 - x^2)(61 - 14x^2 + x^4).$$

Dann wird

$$-F_0' = 120(3x - x^3) + A\left(61x - 25x^3 + 3x^5 - \frac{x^7}{7}\right)$$

F_0 wird nicht gebraucht, sondern nach (9·3) der Quotient

$$\Phi = \frac{F_0'}{F_1'} = \frac{20(3 - x^2) + \frac{1}{6}A\left(61 - 25x^2 + 3x^4 - \frac{1}{7}x^6\right)}{(5 - x^2)^2}$$

Für einige Werte von A sind in folgender Tabelle $\Phi_{\min}$, $\Phi_{\max}$, der Mittelwert $\frac{1}{2}(\Phi_{\max} + \Phi_{\min})$ mit der Fehlerschranke

$$\frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{\Phi_{\max} + \Phi_{\min}}$$

und zum Vergleich die zugehörigen exakten Eigenwerte angegeben. Der tatsächliche Fehler des Mittelwertes ist, besonders bei $A = 40$, wesentlich kleiner als die Fehlerschranke. Bei $A = 20$ stellt F_1 eine Annäherung für die erste Eigenfunktion dar, aber bei $A = 40$ für die zweite Eigenfunktion, da für $A = 40$ der Stab eher nach einer vollen Sinuslinie (mit einem Knoten in der Mitte) ausknickt als nach einer halben Sinuslinie.

A	$\Phi_{\min}$	$\Phi_{\max}$	Mittelwert $\frac{1}{2}(\Phi_{\max} + \Phi_{\min})$	Theoretische Fehler-schranke %	Exakter Eigenwert
10	6,466	6,548	6,507	0,63	$\lambda_1 = 6{,}5202$
20	10,533	10,595	10,564	0,3	$\lambda_1 = 10{,}5731$
40	18,66667	18,69047	18,67857	0,064	$\lambda_2 = 18{,}67879$
90	38,928	39	38,964	0,1	$\lambda_3 = 38{,}9430$

6. Methode von F. Kiessling (Z. angew. Math. Mech. 10 (1930) 594). Die Schranken des Einschließungssatzes werden verengt, indem in die Funktionen $F_0(x)$, $F_1(x)$ von 9·1 noch ein Parameter ϱ eingefügt wird, den man so wählt, daß die Grenzen (9·4) möglichst eng ausfallen. Man führe dies an dem Beispiel

$$-y'' = \lambda(1 + \sin x)y; \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

für den Ansatz

$$F_1(x) = \sin x + \varrho \sin 3x$$

durch.

Ergebnis: Es wird

$$\Phi(x) = \frac{\sin x + 9\varrho \sin 3x}{(\sin x + \varrho \sin 3x)(1 + \sin x)}.$$

Stellt man $\Phi(x)$ für verschiedene Werte von ϱ graphisch dar, so gehen die verschiedenen Kurven durch einen „Festpunkt“, und zwar hier durch den Punkt

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \Phi = 2\left(2 - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}5359 .$$

$\Phi_{\min}$ wird am größten, wenn man ϱ aus $\Phi'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ ermittelt, also für $\varrho = \frac{\sqrt{3}-2}{24} \approx -0{,}01118$, und zwar ist dann $\Phi_{\min} = 0{,}5359$.

$\Phi_{\max}$ wird am kleinsten, nämlich $= 0{,}5673$, wenn man ϱ aus $\Phi(0) = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bestimmt, also für $\varrho = \frac{1}{27}\left(29 - \sqrt{868}\right) \approx -0{,}01710$.

Man hat also die Schranken

$$\lambda_1 \geq 0{,}5359 \quad (\text{Fehler } -0{,}7\%)$$
$$\lambda_1 \leq 0{,}5673 \quad (\quad ,, \quad +5{,}1\%) .$$

Ohne den Parameter ϱ, also für $\varrho = 0$, hätte man nur die ganz groben Schranken $0{,}5 \leq \lambda_1 \leq 1$ erhalten.

4. Kapitel.

Verfahren der schrittweisen Näherungen.

Das hier beschriebene Verfahren der schrittweisen Näherungen (auch „Iterationsverfahren“ oder Verfahren der „sukzessiven Approximationen“ genannt) ist nicht nur bei Eigenwertproblemen, sondern auch bei vielen anderen Differentialgleichungs-Problemen anwendbar und sowohl für die Theorie als auch für die numerische Rechnung von großer Bedeutung. Insbesondere stellt es für selbstadjungierte Eigenwertprobleme der Gestalt (4·5) bis (4·8) (bei einigen Zusatzbedingungen, vgl. den Satz in 12·4), also bei einer großen Anzahl technisch vorkommender Probleme, die Standardmethode zur angenäherten Berechnung des kleinsten Eigenwertes dar, mit der bei erträglichem Aufwand oft sehr enge obere und untere Schranken für den ersten Eigenwert aufgestellt werden können. Auf die praktische Durchführung des Verfahrens wird in 12·5 und 13·6 ausführlich eingegangen.

§ 12. Die Schwarzschen Konstanten.

12·1. Das Verfahren der schrittweisen Näherungen im allgemeinen Fall. Das Verfahren der schrittweisen Näherungen ist sehr allgemein anwendbar, nämlich solange der Eigenwert λ nicht anders als linear in der Differentialgleichung und in den Randbedingungen vorkommt. (Das Verfahren ist, vgl. 14·1, auch bei partiellen Differentialgleichungen benutzbar.) Wir

legen die Differentialgleichung (4·5) und die Randbedingungen (4·8) zugrunde.

Dann lautet die Vorschrift des Verfahrens im allgemeinen Falle: Man geht aus von einer willkürlich gewählten Funktion $F_0(x)$ und bestimmt weitere Funktionen $F_1, F_2, \ldots$; man erhält F_k aus F_{k-1} durch Lösung eines Randwertproblems. Man schreibt in der Differentialgleichung und in den Randbedingungen bei allen Gliedern, die λ als Faktor enthalten, F_{k-1} für y unter Fortlassung von λ und schreibt bei allen anderen, von λ freien Gliedern F_k für y; z. B. würde die Iterationsvorschrift bei $-y'' = \lambda y$; $y(1) = 0$; $\lambda y'(0) = y(0)$ lauten:

$$-F_k'' = F_{k-1},$$
$$F_k(1) = 0, \quad F_{k-1}'(0) = F_k(0).$$

Die Vorschrift vereinfacht sich, wenn λ in den Randbedingungen nicht auftritt. Dann bestimmt man von $F_0(x)$ ausgehend weitere die Randbedingungen erfüllende Funktionen $F_1, F_2, \ldots$ aus den Randwertproblemen

$$(12{\cdot}1) \qquad \begin{cases} M[F_k] = N[F_{k-1}], \\ U_\mu[F_k] = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Man erwartet, daß im Falle der Konvergenz die Funktionen F_n mit wachsendem n immer mehr die Gestalt einer Eigenfunktion y_s annehmen, dann würde $\frac{M[F_n]}{N[F_n]}$ ungefähr gleich dem zugehörigen Eigenwert λ_s sein. Dieser Quotient hängt noch von x ab; man nimmt als Näherungswert Λ den nach Art des RAYLEIGHschen Quotienten (4·25) gebildeten Mittelwert

$$(12{\cdot}2) \qquad \Lambda = \frac{\int_a^b F_n M[F_n]\,dx}{\int_a^b F_n N[F_n]\,dx} = \frac{\int_a^b F_n N[F_{n-1}]\,dx}{\int_a^b F_n N[F_n]\,dx}.$$

In der Allgemeinheit, in der hier das Verfahren beschrieben wurde, lassen sich über Λ und über die Konvergenz des Verfahrens keine weiteren Aussagen machen. Wir legen daher wieder eine engere Problemklasse zugrunde.

12·2. Einführung der Schwarzschen Konstanten a_k und Quotienten μ_k. Wir machen die Voraussetzung, daß das vorgelegte Eigenwertproblem der Gestalt (4·5) bis (4·8) selbstadjungiert sei, daß die Bedingungen (8·2) der Volldefinitheit erfüllt sind und daß der Eigenwert λ nicht in den Randbedingungen vorkommt.

Die Ausgangsfunktion $F_0(x)$ kann frei gewählt werden, jedoch so, daß sie die folgenden Bedingungen erfüllt: Sie ist stetig und $2n$-mal stetig diffe-

renzierbar, sie braucht nicht alle Randbedingungen zu erfüllen, aber doch so viele, daß für eine beliebige Vergleichsfunktion u gilt[1]):

$$(12\cdot 3) \qquad \int_a^b (F_0 N[u] - u N[F_0])\, dx = 0 \quad \text{und} \quad \int F_0 N[F_0]\, dx > 0 .$$

Mit Hilfe der DIRICHLETschen Umformung (4·11) läßt sich in jedem Einzelfall leicht feststellen, welche Randbedingungen F_0 erfüllen muß, damit (12·3) gilt.

Z. B. ist bei $N[y] = g_0 y$, also bei den speziellen Eigenwertproblemen, die Bedingung (12·3) von selbst erfüllt, d. h. in diesem Falle braucht F_0 *keine* Randbedingungen zu erfüllen und kann eine beliebige stetige Funktion $\not\equiv 0$ sein. Erfüllt F_0 selbst schon alle $2m$ Randbedingungen, so ist wegen der Selbstadjungiertheit die Bedingung (12·3) natürlich erfüllt.

Um genaue Schranken zu erhalten, wird man gewöhnlich F_0 so ansetzen, daß es bereits alle Randbedingungen erfüllt. Es kann jedoch manchmal für die Rechnung bequemer sein, F_0 nur einen Teil der Randbedingungen aufzuerlegen, und erst die weiteren aus der Vorschrift (12·1) bestimmten Funktionen $F_1, F_2, \ldots$ erfüllen dann alle $2m$ Randbedingungen. (Für praktische Zwecke wird man oft mit F_1 auskommen.)

Mit den so durch Lösung von Randwertproblemen gewonnenen F_n werden die von H. A. SCHWARZ[2]) eingeführten SCHWARZschen Konstanten a_k gebildet:

$$(12\cdot 4) \qquad a_k = \int_a^b F_i N[F_{k-i}]\, dx \qquad (0 \leq i \leq k,\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sie sind nur scheinbar von i abhängig, denn es gilt bei Benutzung der Vorschrift (12·1) und der Selbstadjungiertheit

$$(12\cdot 5) \qquad \begin{aligned} a_k &= \int_a^b F_i M[F_{k-i+1}]\, dx \\ &= \int_a^b F_{k-i+1} M[F_i]\, dx \\ &= \int_a^b F_{k-i+1} N[F_{i-1}]\, dx = \int_a^b F_{i-1} N[F_{k-i+1}]\, dx . \end{aligned}$$

---

[1]) D. h. $F_0(x)$ soll in der Ausdrucksweise des Zusatzes 1 von 10·3 eine „halbzulässige Funktion“ sein.

[2]) KARL HERMANN AMANDUS SCHWARZ, deutscher Mathematiker, geboren 25. Januar 1843 als Sohn eines Baumeisters in Hermsdorf unterm Kynast, studierte 1860—1866 am Gewerbeinstitut und an der Universität Berlin, promovierte 1864, wurde 1866 Privatdozent in Berlin, 1867 a. o. Professor in Halle, 1869 in Zürich, 1875 o. Professor in Göttingen und war seit 1892 Professor an der Universität Berlin; er starb am 30. November 1921 in Berlin (Nachruf von v. MISES, Z. angew. Math. Mech. 1 [1921] 494—496).

Das Integral $\int_a^b F_i N[F_{k-1}]\,dx$ ist also nur von der Summe $i+(k-i)$ der Indizes, also nur von k abhängig, wie behauptet; z. B. ist

$$(12\cdot6)\qquad a_2=\int_a^b F_2 N[F_0]\,dx=\int_a^b F_1 N[F_1]\,dx=\int_a^b F_0 N[F_2]\,dx\,.$$

Wegen der Voraussetzung (8·2) sind alle a_k positiv, denn

$$(12\cdot7)\qquad \begin{cases} a_{2k}=\int_a^b F_k N[F_k]\,dx>0\,,\\ a_{2k-1}=\int_a^b F_k M[F_k]\,dx>0\,.\end{cases}$$

Aus den SCHWARZschen Konstanten a_k werden die SCHWARZschen Quotienten μ_k berechnet nach

$$(12\cdot8)\qquad \mu_{k+1}=\frac{a_k}{a_{k+1}}\qquad (k=0,1,2,\ldots)\,.$$

Wegen (12·7) sind alle Quotienten μ_k positiv. Die Quotienten μ_{2k} mit geradem Index lassen sich als RAYLEIGHsche Quotienten (4·25) schreiben; es ist

$$(12\cdot9)\qquad \mu_{2k}=\frac{a_{2k-1}}{a_{2k}}=\frac{\int_a^b F_k M[F_k]\,dx}{\int_a^b F_k N[F_k]\,dx}=R[F_k]\,.$$

Beispiel: Vorgelegt sei die Eigenwertaufgabe

$$-y''=\lambda y\,,$$
$$y(0)=y(1)+y'(1)=0\,.$$

Von der Funktion $F_0(x)$ braucht hier nur Stetigkeit vorausgesetzt zu werden, wir können also z. B. $F_0(x)=1$ wählen. Nun wird $F_1(x)$ aus der Iterationsvorschrift (12·1)

$$-F_1''=F_0\,,$$
$$F_1(0)=F_1(1)+F_1'(1)=0$$

ermittelt. Man erhält durch Integration $F_1=c_1+c_2x-\frac{1}{2}x^2$ und bestimmt die Integrationskonstanten c_1, c_2 so, daß F_1 die Randbedingungen erfüllt; man findet

$$F_1=\frac{1}{4}(3x-2x^2)\,.$$

Man kann nun bereits nach (12·4) und (12·8) die SCHWARZschen Konstanten a_0, a_1, a_2 und Quotienten μ_1, μ_2 berechnen:

$$a_0=\int_0^1 F_0^2\,dx=1\,;\quad a_1=\int_0^1 F_0F_1\,dx=\frac{5}{24}\,;\quad a_2=\int_0^1 F_1^2\,dx=\frac{1}{20}\,;$$

$$\mu_1=\frac{a_0}{a_1}=\frac{24}{5}\,;\qquad \mu_2=\frac{a_1}{a_2}=\frac{25}{6}\,;$$

ebenso erhält man durch weitere Integrationen

$$48\,F_2 = 7\,x - 6\,x^3 + 2\,x^4,$$
$$1440\,F_3 = 50\,x - 35\,x^3 + 9\,x^5 - 2\,x^6,$$
$$241\,920\,F_4 = 2035\,x - 1400\,x^3 + 294\,x^5 - 36\,x^7 + 6\,x^8.$$

Die folgende Tabelle enthält die ersten a_k und μ_k:

k	a_k	μ_k	$\mu_{k-1} - \mu_k$
0	1	—	—
1	$\frac{5}{24}$	$\frac{24}{5} = 4{,}8$	—
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{25}{6} = 4{,}1667$	0,6333
3	$\frac{163}{28 \cdot 480}$	$\frac{672}{163} = 4{,}12270$	0,0440
4	$\frac{1069}{315 \cdot 1152}$	$\frac{4401}{1069} = 4{,}116932$	0,00577
5	$\frac{653}{3168 \cdot 288}$	$\frac{94072}{22855} = 4{,}1160359$	0,000896
6	$\frac{108281}{3003 \cdot 207360}$	$\frac{891345}{216562} = 4{,}11588829$	0,0001476

Mit Hilfe der später anzugebenden Hauptformel (12·19) kann man aus diesen Zahlen μ_k den ersten Eigenwert auf fünf geltende Stellen genau zu

$$\lambda_1 = 4{,}1159$$

berechnen. Er ist (mit $\lambda = k^2$) exakt durch die kleinste positive Nullstelle der transzendenten Gleichung $\operatorname{tg} k = -k$ festgelegt.

12·3. Die μ_k bilden eine monoton abnehmende Folge. Das erkennt man bei Benutzung der Definitheit: Nach Voraussetzung (8·2) gilt für alle Vergleichsfunktionen u:

$$Q_1 = \int_a^b u\,M[u]\,dx > 0; \quad Q_2 = \int_a^b u\,N[u]\,dx > 0.$$

Wir setzen hier

$$u = a_{2k+1} F_k - a_{2k} F_{k+1}$$

ein. Diese Funktion u ist, sofern sie $\not\equiv 0$ ist, für $k = 0$ eine halbzulässige Funktion und für $k > 0$ eine Vergleichsfunktion. Es kann auch $u \equiv 0$ sein, z. B. wenn F_0 eine Eigenfunktion ist, daher schreiben wir weiterhin $Q_1 \geq 0$, $Q_2 \geq 0$. Man rechnet mit Benutzung von (12·4) und (12·5) aus

$$Q_1 = \int_a^b (a_{2k+1} F_k - a_{2k} F_{k+1})\,(a_{2k+1} M[F_k] - a_{2k} M[F_{k+1}])\,dx$$
$$= a_{2k+1}^2 a_{2k-1} - 2\,a_{2k} a_{2k+1} a_{2k} + a_{2k}^2 a_{2k+1}$$
$$= a_{2k+1} (a_{2k-1} a_{2k+1} - a_{2k}^2) \geq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$
$$Q_2 = a_{2k} (a_{2k} a_{2k+2} - a_{2k+1}^2) \geq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wegen (12·7) kann man diese beiden Ungleichungen durch $a_{2k}a_{2k-1}^2$, bzw. durch $a_{2k}a_{2k-1}a_{2k-2}$ durchdividieren und erhält

$$\mu_{2k} \geqq \mu_{2k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\mu_{2k+1} \geqq \mu_{2k+2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die μ_k nehmen mithin monoton ab. Die μ_{2k} sind die RAYLEIGHschen Quotienten $R[F_k]$. Diese sind $\geqq \lambda_1$ nach dem Satz in 8·1; daher sind alle μ_k größer oder gleich λ_1.

Es gilt also der

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5) *bis* (4·8) *sei selbstadjungiert, die Bedingungen* (8·2) *der Volldefinitheit seien erfüllt, und der Eigenwert λ trete nicht in den Randbedingungen auf. Erfüllt die Ausgangsfunktion $F_0(x)$ die Bedingung* (12·3), *so bilden die zu dieser Funktion gehörigen, nach* (12·1), (12·4), (12·8) *berechenbaren Schwarzschen Quotienten μ_k eine monoton abnehmende, durch den ersten Eigenwert λ_1 nach unten beschränkte, also konvergente Zahlenfolge:*

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3 \geqq \cdots \geqq \lambda_1. \tag{12·11}$$

Hieraus folgt die Existenz eines Grenzwertes der Folge μ_k, aber noch nichts über die Größe dieses Grenzwertes, außer daß er $\geqq \lambda_1$ ist. Ist z. B. $F_0(x)$ gleich der s-ten Eigenfunktion y_s, so ist $\mu_k = \lambda_s$ für alle k; dann ist der Grenzwert also λ_s. Die μ_k können also von λ_1 sehr weit entfernt sein. Es ist nun für die numerische Rechnung wichtig, daß man unter gewissen Zusatzvoraussetzungen aussagen kann, daß die μ_k in der Nähe von λ_1 liegen und daß man sogar den Fehler $|\mu_k - \lambda_1|$ abschätzen kann.

12·4. Untere Schranke für den ersten Eigenwert. In dieser Nummer soll für den Fall, daß der kleinste Eigenwert λ_1 ein einfacher ist, der Fehler $\mu_k - \lambda_1$ nach oben abgeschätzt und damit der erste Eigenwert λ_1 in Schranken eingeschlossen werden. Das Ergebnis ist die Formel (12·19); diese wichtige Formel wird in 14·3 nochmals auf anderem Wege, nämlich mit Hilfe des Entwicklungssatzes hergeleitet.

Zum Beweise[1] der Hauptformel (12·19), und zwar nur zum Beweise, nicht zur numerischen Rechnung, benutzt man außer der Ausgangsfunktion $F_0(x)$ eine Hilfsfunktion $H_0(x)$, die sich aus F_0 und der ersten Eigenfunktion

[1] Die Formel (12·19) wurde für die speziellen Eigenwertprobleme bewiesen bei G. TEMPLE, Proc. Lond. math. Soc. (2) 29 (1929) 259—280, und bei G. TEMPLE und W. G. BICKLEY, Rayleigh's Principle and its Application to Engineering, London 1933.

y_1 linear zusammensetzt[1]):

(12.12) $$H_0 = F_0 - c y_1$$

und zur ersten Eigenfunktion y_1 im verallgemeinerten Sinne orthogonal ist:

(12·13) $$\int_a^b H_0 N[y_1]\,dx = 0;$$

die erste Eigenfunktion $y_1(x)$ denken wir uns durch

(12·14) $$\int_a^b y_1 N[y_1]\,dx = 1$$

normiert. Dann ergibt sich aus der Forderung (12·13) der Wert von c:

$$\int_a^b F_0 N[y_1]\,dx = c \int_a^b y_1 N[y_1]\,dx = c\,.$$

Damit ist c und daher eine ganz bestimmte Funktion $H_0(x)$ nach (12·12) festgelegt. Sie ist orthogonal zu $N[y_1]$ und enthält, wie man sagt, die Komponente zur ersten Eigenfunktion nicht mehr. Man denkt sich nun nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen aus H_0 weitere Vergleichsfunktionen $H_1, H_2, \ldots$ nach der Vorschrift $M[H_n] = N[H_{n-1}]$ und $U_\mu[H_n] = 0$ ermittelt, genau so, wie die weiteren F_n aus F_0 ermittelt wurden[2]). Dann sind auch alle weiteren H_i zu $N[y_1]$ orthogonal; denn es ist

$$\int_a^b H_1 N[y_1]\,dx = \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b H_1 M[y_1]\,dx = \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b y_1 M[H_1]\,dx$$
$$= \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b y_1 N[H_0]\,dx = \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b H_0 N[y_1]\,dx = 0\,.$$

Ebenso folgt

(12·15) $$\int_a^b H_k N[y_1]\,dx = \frac{1}{(\lambda_1)^k}\int_a^b H_0 N[y_1]\,dx = 0\,.$$

Bilden wir nun die RAYLEIGHschen Quotienten $R[H_k]$ für $k \geq 1$, so stellen sie nach dem Satz in 8·3 eine obere Schranke für λ_2 dar, denn die Nebenbedingung (8·14) ist wegen (12·15) erfüllt.

---

1) Ist $F_0(x)$ selbst eine erste Eigenfunktion, so sind alle $\mu_k = \lambda_1$, und in (12·19) stehen die Gleichheitszeichen. Wir schließen im folgenden diesen trivialen Fall aus, dann ist $H_0 \not\equiv 0$.

2) Mit $F_0(x)$ ist auch $H_0(x)$ eine halbzulässige Funktion. Aus $\int_a^b H_0 N[H_0]\,dx > 0$ folgt insbesondere $N[H_0] = M[H_1] \not\equiv 0$, also $H_1 \not\equiv 0$, ebenso gilt $H_k \not\equiv 0$ für alle k.

Es gilt also $R[H_k] \geq \lambda_2$ für $k \geq 1$. Denken wir uns auch die SCHWARZschen Konstanten b_k und Quotienten ν_k mit den Funktionen H_k gebildet:

$$b_k = \int_a^b H_i N[H_{k-i}]\,dx; \quad \nu_{k+1} = \frac{b_k}{b_{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

so bilden also die ν_k eine monoton abnehmende Zahlenfolge mit $\nu_k \geq \lambda_2$.

Die Funktionen H_k hängen eng mit den F_k zusammen. Es ist

$$H_1 = F_1 - \frac{c}{\lambda_1} y_1,$$

denn mit Benutzung von (12·12) gilt

$$M\left[F_1 - \frac{c}{\lambda_1} y_1\right] = M[F_1] - \frac{c}{\lambda_1} M[y_1] = N[F_0] - cN[y_1] = N[H_0],$$

die Funktion $F_1 - \frac{c}{\lambda_1} y_1$ erfüllt also tatsächlich die von H_1 geforderten Gleichungen $M[H_1] = N[H_0]$ und $U_\mu[H_1] = 0$. Mit der gleichen Überlegung folgt allgemein

$$H_k = F_k - \frac{c}{\lambda_1^k} y_1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Auch zwischen den SCHWARZschen Konstanten a_k und b_k besteht ein enger Zusammenhang:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_a^b F_0 N[F_k]\,dx = \int_a^b (H_0 + c y_1) N\left[H_k + \frac{c}{\lambda_1^k} y_1\right] dx \\ &= \int_a^b H_0 N[H_k]\,dx + \frac{c}{\lambda_1^k} \int_a^b H_0 N[y_1]\,dx + c \int_a^b y_1 N[H_k]\,dx \\ &\qquad + \frac{c^2}{\lambda_1^k} \int_a^b y_1 N[y_1]\,dx, \end{aligned}$$

wegen (12·13), (12·14) und der aus (12·15) folgenden Gleichung

$$\int_a^b y_1 N[H_k]\,dx = 0$$

ergibt sich also

$$a_k = b_k + \frac{c^2}{\lambda_1^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Gleichung schreiben wir auch für $k + 1$ an:

$$a_{k+1} = b_{k+1} + \frac{c^2}{(\lambda_1)^{k+1}}$$

und erhalten durch Elimination von c^2:

$$a_k - \lambda_1 a_{k+1} = b_k - \lambda_1 b_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Gleichung erlaubt uns, auch eine Beziehung zwischen den SCHWARZschen Quotienten μ_k und ν_k aufzustellen:

$$(12\cdot16)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\mu_k-\mu_{k+1}}{\mu_{k+1}-\lambda_1}+1\right)\mu_{k+1}=\dfrac{\mu_k-\lambda_1}{\mu_{k+1}-\lambda_1}\,\mu_{k+1}=\dfrac{a_{k-1}-\lambda_1 a_k}{a_k-\lambda_1 a_{k+1}} \\ \qquad =\dfrac{b_{k-1}-\lambda_1 b_k}{b_k-\lambda_1 b_{k+1}}=\dfrac{\nu_k-\lambda_1}{\nu_{k+1}-\lambda_1}\,\nu_{k+1}\,. \end{cases}$$

Man kann nun abschätzen

$$\frac{\nu_k-\lambda_1}{\nu_{k+1}-\lambda_1}\,\nu_{k+1}\geq 1\cdot\nu_{k+1}\gtrsim\lambda_2$$

und erhält damit aus (12·16)

$$(12\cdot17)\qquad \frac{\mu_k-\mu_{k+1}}{\mu_{k+1}-\lambda_1}\gtrsim\frac{\lambda_2}{\mu_{k+1}}-1\,,$$

oder, falls $\lambda_2>\mu_{k+1}$ ist (auf diese Bedingung wird noch weiter eingegangen; sie verlangt, daß $\lambda_2>\lambda_1$, daß also λ_1 ein einfacher Eigenwert ist):

$$(12\cdot18)\qquad 0\leq\mu_{k+1}-\lambda_1\leq\frac{\mu_k-\mu_{k+1}}{\dfrac{\lambda_2}{\mu_{k+1}}-1}\,.$$

Die Ungleichung (12·17) bleibt richtig, wenn man in ihr λ_2 durch eine untere Schranke l_2 ersetzt. Das ist wichtig, weil man in vielen Fällen den zweiten Eigenwert λ_2 nicht kennen wird, aber vielleicht eine untere Schranke l_2 für ihn angeben kann. Für den Übergang zu (12·18) muß dann $l_2>\mu_{k+1}$ gefordert werden. Somit haben wir das Ergebnis erhalten:

Abb. 12·1. Lage der Eigenwerte und SCHWARZschen Quotienten.

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5) *bis* (4·8) *erfülle die Voraussetzungen*:

a) sie ist selbstadjungiert,

b) sie erfüllt die Bedingungen (8·2), *ist also volldefinit,*

c) der Eigenwert λ *tritt nicht in den Randbedingungen auf,*

d) der kleinste Eigenwert λ_1 *ist ein einfacher.*

Ausgehend von einer stetigen $2n$*-mal stetig differenzierbaren Funktion* $F_0(x)$, *die so viele der vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt, daß* (12·3) *gilt, werden nach dem Verfahren* (12·1) *der schrittweisen Näherungen einige weitere Funktionen* $F_1, F_2, \ldots$ *und mit ihnen die Schwarzschen Konstanten* a_k *nach* (12·4) *und Quotienten* μ_k *nach* (12·8) *berechnet. Ist* l_2 *eine untere Schranke für den zweiten Eigenwert, die aber noch größer sein muß als* μ_{k+1}, *so kann man den ersten Eigenwert* λ_1 *in die Schranken einschließen*:

$$(12\cdot19)\qquad \mu_{k+1}-\frac{\mu_k-\mu_{k+1}}{\dfrac{l_2}{\mu_{k+1}}-1}\leq\lambda_1\leq\mu_{k+1}\qquad(k=1,2,\ldots)\,.$$

12·5. Gang der praktischen Durchführung des Verfahrens. Nach der Vorschrift (12·1) des Verfahrens der schrittweisen Näherungen hat man, von der gewählten Funktion $F_0(x)$ ausgehend, jede weitere Funktion $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... jeweils durch Lösung eines Randwertproblems zu ermitteln. Wenn nun die vorgelegte Differentialgleichung von sehr einfacher Bauart ist, die Koeffizienten formelmäßig durch einfache Ausdrücke gegeben sind, kann man, wie es in dem Beispiel in 12·2 gezeigt ist, eine Anzahl von Funktionen $F_k(x)$ berechnen. Jedoch bei komplizierteren Eigenwertproblemen wird die wiederholte Lösung von Randwertproblemen oft auf große Schwierigkeiten stoßen, und es ist wichtig, daß man im allgemeinen mit $F_0(x)$ und $F_1(x)$ allein zu einer für technische Zwecke ausreichenden Genauigkeit kommt. Der Rechnungsgang besteht aus folgenden drei Schritten:

1. Man verschafft sich zwei Funktionen $F_0(x)$ und $F_1(x)$ mit den Eigenschaften: $M[F_1] = N[F_0]$; es erfüllt $F_1(x)$ alle Randbedingungen und $F_0(x)$ so viele, daß (12·3) gilt.

In vielen Fällen kann man durch graphische Integrationen zwei derartige Funktionen F_0, F_1 bestimmen; hierauf wird in 13·6 ausführlich eingegangen. Bei den speziellen Eigenwertproblemen mit $N[F_0] = g_0 \cdot F_0$ kann man von einer alle Randbedingungen erfüllenden Funktion F_1 ausgehen und F_0 aus $g_0 F_0 = M[F_1]$ berechnen. Gewöhnlich kann man hier bei F_1 mit willkürlichen Konstanten c_i multiplizierte die Randbedingungen erfüllende Funktionen ψ_i hinzufügen und die c_i so bestimmen, daß auch F_0 die Randbedingungen erfüllt. Dadurch erhält man oft wesentlich günstigere Resultate, wie überhaupt die Ergebnisse um so besser ausfallen, je mehr F_0 und F_1 die Gestalt der ersten Eigenfunktion haben.

2. Man berechnet die SCHWARZschen Konstanten (12·4) und Quotienten (12·8):

$$(12{\cdot}20)\quad \begin{cases} a_0 = \int\limits_a^b F_0 N[F_0]\,dx; \qquad a_1 = \int\limits_a^b F_1 N[F_0]\,dx = \int\limits_a^b F_0 N[F_1]\,dx; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_2 = \int\limits_a^b F_1 N[F_1]\,dx, \end{cases}$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1}, \qquad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2}.$$

Dann weiß man:

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \lambda_1 .$$

3. Zur Berechnung einer unteren Schranke für λ_1 benötigt man eine untere Schranke l_2 für den zweiten Eigenwert λ_2, die ganz grob sein kann; sie muß jedoch so gut sein, daß $l_2 > \mu_2$ erfüllt ist. Oft wird man mit Hilfe des Vergleichungssatzes, z. B. durch Vergleich mit einem Eigenwertproblem mit konstanten Koeffizienten (vgl. z. B. 9·4) untere Schranken für die

Eigenwerte aufstellen können. Ferner wird es für technische Zwecke oft genügen, den Fehler von μ_2 ungefähr zu kennen (zu wissen, welche Dezimale noch benutzt werden kann) und dann für l_2 den nach dem RITZschen Verfahren oder nach dem Differenzenverfahren oder nach irgendeinem anderen Verfahren berechneten Näherungswert für den zweiten Eigenwert einzusetzen, was zwar nicht exakt und nicht immer richtig ist, aber dadurch eine gewisse Berechtigung erfährt, daß die Schranke (12·19) von dem Wert l_2 nur schwach beeinflußt wird, solange l_2 nicht nahe bei μ_{k+1} liegt. Nach (12·19) gilt dann

(12·21) $$\mu_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\frac{l_2}{\mu_2} - 1} \leq \lambda_1 \leq \mu_2 .$$

12·6. Beispiele zur rechnerischen Durchführung des Verfahrens.

1. Beispiel: Gelenkig gelagerter Knickstab.

Vorgelegt sei ein Knickstab (Abb. 12·2) wie in 1·1 von der Länge $l = \pi$ und der veränderlichen Biegesteifigkeit

$$\alpha = \frac{\text{const.}}{1 + \sin x} = \frac{c}{1 + \sin x},$$

der an den beiden Enden $x = 0$ und $x = \pi$ gelenkig gelagert ist. Ist P die gesuchte Knicklast, so lautet mit $\lambda = \frac{P}{c}$ das zugehörige Eigenwertproblem

$$-y'' = \lambda(1 + \sin x)\, y ,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0 .$$

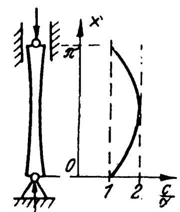


Abb. 12·2. Knickstab veränderlicher Steifigkeit.

Wir gehen aus von der die Randbedingungen erfüllenden Funktion

$$F_1 = \sin x$$

und bestimmen F_0 nach (12·1) aus der Gleichung

$$-F_1'' = (1 + \sin x) F_0 \quad \text{zu} \quad F_0 = \frac{\sin x}{1 + \sin x} .$$

Die SCHWARZschen Konstanten lauten:

$$a_0 = \int_0^\pi (1 + \sin x)\, F_0^2\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x}\, dx = 4 - \pi ,$$

$$a_1 = \int_0^\pi (1 + \sin x)\, F_0 F_1\, dx = \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} ,$$

$$a_2 = \int_0^\pi (1 + \sin x)\, F_1^2\, dx = \int_0^\pi (1 + \sin x) \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} .$$

Die Quotienten werden

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{8}{\pi} - 2 = 0{,}54648\,,$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1 + \frac{8}{3\pi}} = 0{,}54088\,.$$

Wir wissen nach (12·11) $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \lambda_1$. Zur Aufstellung einer unteren Schranke für λ_1 müssen wir λ_2 nach unten abschätzen. Das geschieht durch Vergleich mit dem Problem mit konstanten Koeffizienten:

Ersetzt man (Abb. 12·2) $1 + \sin x$ durch die Zahl 2, so werden nach 9·4 alle Eigenwerte verkleinert. Ersetzt man es durch 1, so werden alle Eigenwerte vergrößert. Das Vergleichsproblem $-y'' = 2\lambda y$ hat die Eigenfunktionen $y_n = \sin nx$ mit den Eigenwerten $\lambda_n = \frac{n^2}{2}$; bei unserem Problem ist also:

$$\lambda_1 \geqq 0{,}50\,, \qquad \lambda_2 \geqq 2\,,$$

man hat somit eine untere Schranke $l_2 = 2$ für λ_2.

Die Abschätzungsformel (12·19) ergibt dann

$$0{,}53880 \leqq \lambda_1 \leqq 0{,}54088\,.$$

Der Mittelwert ist $\lambda_1 \approx 0{,}5398$ und hat mithin einen Fehler von höchstens 0,2%.

2. Beispiel: Knickstab eingespannt-gelenkig.

Das Knickproblem für einen einseitig eingespannten, am anderen Ende gelenkig gelagerten Stab (Abb. 12·3) mit der Länge $l = 1$ und der veränderlichen Biegesteifigkeit $\alpha = c(2 - x)$ führt nach (1·3) auf die Differentialgleichung

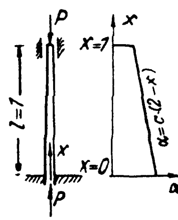


Abb. 12·3. Knickstab, eingespannt-gelenkig gelagert.

$$(\alpha y'')'' = -P y''$$

oder mit der Abkürzung $\lambda = \frac{P}{c}$

$$\{(2 - x) y''\}'' = -\lambda y''\,.$$

Die Randbedingungen sind

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0\,.$$

Zur Aufstellung zweier Funktionen F_0, F_1, die (12·1) erfüllen, wird der Ansatz gemacht:

$$F_1 = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5\,.$$

Man geht also hier zweckmäßig wieder von F_1 aus. Da F_1 ein Polynom fünften Grades ist, wird $M[F_1] = N[F_0] = -F_0''$ ein Polynom zweiten Grades, F_0 ein Polynom vierten Grades. Die beiden Konstanten bei der Integration und die Größen a_i werden so bestimmt, daß F_0 die drei wesentlichen Randbedingungen $F_0(0) = F_0'(0) = F_0(1) = 0$ und F_1 alle vier Randbedingungen erfüllt. Man erhält:

$$F_1 = 24\,x^2 - 4\,x^3 - 47\,x^4 + 27\,x^5\,,$$

$$F_1'' = 12(4 - 2\,x - 47\,x^2 + 45\,x^3)\,,$$

$$F_0 = 12(92\,x^2 - 137\,x^3 + 45\,x^4)\,.$$

Damit wird nach (12·4)

$$a_0 = -\int_0^1 F_0 F_0'' \, dx = \frac{96}{7} \cdot 4978{.}1 \approx 288 \cdot 237{,}052 \,,$$

$$a_1 = \underbrace{-\int_0^1 F_0 F_1'' \, dx = -\int_0^1 F_1 F_0'' \, dx}_{\text{Kontrolle!}} = \frac{16026}{7} \approx 144 \cdot 15{,}8988 \,,$$

$$a_2 = -\int_0^1 F_1 F_1'' \, dx = \frac{12}{7} \cdot 45{,}2 \approx 12 \cdot 6{,}45714 \,.$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 29{,}8201 \,,$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 29{,}54646 \,.$$

Nun stellen wir zunächst eine grobe untere Schranke für λ_2 auf durch Lösung des Vergleichsproblems mit konstanten Koeffizienten, bei dem man also $2 - x$ durch eine Konstante, und zwar durch seinen kleinsten Wert 1 ersetzt:

$$f^{\mathrm{IV}} = -\lambda f'' .$$

Die Lösungen dieses Problems erhält man mit $\lambda = k^2$ bei den gestellten Randbedingungen (vgl. Tafel VII) aus der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg} k = k \,.$$

Die ersten Wurzeln sind[1])

k	$\lambda = k^2$	$2\,k^2$
4,4934	20,19	40,38
7,7253	59,68	119,36

Man erhält so die ganz groben Schranken:

$$20{,}19 \leq \lambda_1 \leq 40{,}38 \,.$$
$$59{,}68 \leq \lambda_2 \leq 119{,}36 \,.$$

Wir verwenden

$$l_2 = 59{,}68$$

und erhalten aus (12·21) als Ergebnis

$$29{,}275 \leq \lambda_1 \leq 29{,}5465 \,.$$

Der Mittelwert $\lambda_1 \approx 29{,}41$ hat einen Fehler von höchstens 0,5%.

§ 13. Graphische Integrationen.

13·1. Graphische einfache Integrationen. Die graphische Integration einer kurvenmäßig gegebenen Funktion $y(x)$ wird dem Leser hinreichend

[1]) F. Emde, Tafeln elementarer Funktionen, Leipzig und Berlin 1940. S. 130.

bekannt sein[1]), so daß es genügt, das Verfahren mit Betonung des für das folgende Gebrauchten kurz zu wiederholen. Wir beschränken uns auf das besonders günstige „Verfahren der mittleren Abszissen".

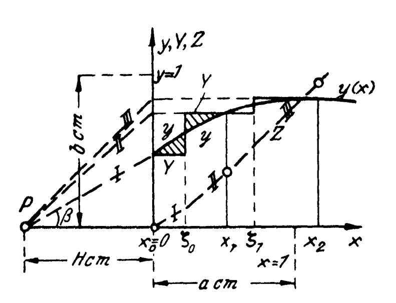


Abb. 13·1. Graphische einfache Integration nach dem Verfahren der mittleren Abszissen.

Die Funktion $y(x)$ liege gezeichnet vor (Abb. 13·1), und es soll ihr Integral

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} y(\xi)\,d\xi \tag{13·1}$$

gezeichnet werden. Das in Betracht kommende x-Intervall wird durch Zwischenabszissen $x_1, x_2, \ldots$ in eine Anzahl Teilintervalle zerlegt und die Kurve für $y(x)$ in jedem Teilintervall durch eine „Treppe", d. h. durch eine stückweise konstante Funktion $Y(x)$, ersetzt. Diese Ersetzung erfolgt in jedem Teilintervall, z. B. im Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ so, daß nach Wahl einer „mittleren Abszisse" ζ_0 die Funktion $Y(x)$ links von ζ_0 gleich dem linken Funktionswert $y(x_0)$ und rechts gleich dem rechten Funktionswert $y(x_1)$ gesetzt wird und daß die dreieckartigen Flächenstücke, die in der Abb. 13·1 schraffiert sind, gleichen Flächeninhalt haben; ζ_0 wird nach dem Augenmaß bestimmt; dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} y(\xi)\,d\xi = \int_{x_0}^{x_1} Y(\xi)\,d\xi$$

gewährleistet, und wenn man die Funktion $Y(x)$ zur Polygonzugsfunktion

$$Z(x) = \int_{x_0}^{x} Y(\xi)\,d\xi \tag{13·2}$$

integriert, erhält man in $Z(x)$ eine Kurve, die nicht nur an den Stellen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit $z(x)$ übereinstimmt, sondern in diesen Punkten die gleiche Tangente hat wie $z(x)$.

Zur Durchführung der Integration (Abb. 13·2) wählt man einen „Pol" P auf der negativen x-Achse im Abstande von H cm (H heißt die Poldistanz) von der y-Achse. Markiert man auf der y-Achse die Ordinaten der Y-Treppe, also die Werte $y(x_0)$, $y(x_1)$, $y(x_2)$, ..., so sind die Verbindungslinien der so markierten Punkte mit dem Pol P Gerade, deren Steigungen den Werten $Y(x_i)$ proportional sind und zu denen also die Z-Kurve in den einzelnen

[1]) Vgl. z. B.: Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, Berlin und Leipzig 1928, S. 113ff.

Intervallen parallel sein soll. Man erhält so durch Zeichnen der Parallelen (in der Abb. 13·1 durch gleiche römische Ziffern gekennzeichnet) den $Z(x)$-Polygonzug, der in den durch Nullenkreise hervorgehobenen Punkten richtige Punkte der Kurve für $z(x)$ mit den dazugehörigen Tangenten liefert. Man kann dann leicht das Tangentenpolygon für $z(x)$ durch eine „glatte" Kurve ersetzen. Damit ist im Prinzip das Verfahren beschrieben; zur praktischen Durchführung ist noch eine Maßstabsbetrachtung erforderlich.

Die Maßstäbe mögen als Quotienten eingeführt werden[1]):

$$\text{(13·3)} \qquad \text{Maßstab } m = \frac{\text{Wirkliche Größe}}{\text{Darstellungsgröße in cm der Zeichnung}} .$$

Umgekehrt findet man dann zu einer aus der Zeichnung in cm abgelesenen Darstellungsgröße den wirklichen Wert durch Multiplikation mit dem Maßstab:

(13·4) Wirkliche Größe = Darstellungsgröße in cm mal Maßstab m.

Zunächst haben wir beim Zeichnen der Kurve für $y(x)$ Maßstäbe für x und y benutzt, indem die Einheit in der x-Richtung a cm lang gemacht wurde und die Einheit in der y-Richtung b cm, also

$$\text{(13·5)} \qquad m_x = \frac{1}{a\text{ cm}} \qquad m_y = \frac{1}{b\text{ cm}} .$$

Bezeichnen wir die Darstellungsgrößen durch Überstreichen der wirklichen Größen, wird also z. B. $Y(x_0)$ durch eine Länge von $\overline{Y}(x_0)$ cm dargestellt, so gilt

$$Y = m_y \overline{Y}; \quad \zeta_0 = m_x \overline{\zeta_0}; \quad Z(\xi_0) = m_z \overline{Z}(\zeta) .$$

Die hierbei aufgetretene Größe m_z ist der gesuchte, zu berechnende Maßstab, der uns aus den abgelesenen Z-Ordinaten die wirklichen z-Werte zu berechnen gestattet.

Nun ist nach Abb. 13·1

$$\text{(13·6)} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{Y(x_0)}}{H} = \frac{Y(x_0)}{m_y \cdot H} .$$

Nach der Konstruktion mit Hilfe der Parallelen ist andererseits

$$\text{(13·7)} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{Z(\zeta_0)}}{\overline{\zeta_0}} = \frac{Z(\zeta_0) \cdot m_x}{m_z \cdot \zeta_0} .$$

Vergleich der beiden Ausdrücke für $\operatorname{tg}\beta$ liefert wegen $Z(\zeta_0) = \zeta_0 Y(x_0)$

$$\text{(13·8)} \qquad m_z = H m_x m_y .$$

[1]) Vgl. z. B.: TH. PÖSCHL, Lehrbuch der Technischen Mechanik, Bd. II, Berlin 1936, S. 82, und K. KLOTTER, Einführung in die technische Schwingungslehre, Berlin 1938, S. 9.

Beispiel: In Abb. 13·2 ist die Funktion $y = \cos x$ graphisch dargestellt; es wurden die Maßstäbe

$$m_x = \frac{1}{4\text{ cm}} \quad \text{und} \quad m_y = \frac{1}{5\text{ cm}}$$

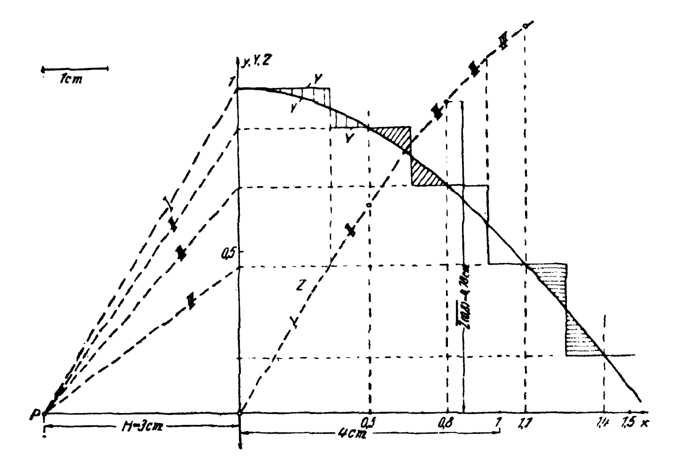


Abb. 13·2. Beispiel zur graphischen einfachen Integration mit mittleren Abszissen.

verwendet. Als Teilpunkte der x-Achse wurden die Abszissen $x_1 = 0{\cdot}5$; $x_2 = 0{,}8$; $x_3 = 1{,}1$; $x_4 = 1{,}4$ benutzt und die cos-Linie durch eine Treppenkurve (Y-Polygon) ersetzt. Mit der Poldistanz $H = 3$ cm wurde die graphische Integration nach dem beschriebenen Verfahren bis zur Stelle $x = 1{,}1$ durchgeführt. Der Maßstab für die z-Werte berechnet sich nach (13·8) zu

$$m_z = H\,m_x m_y = \frac{3}{20\text{ cm}}.$$

Will man z. B. den Wert von z an der Stelle 0,8 wissen, so liest man aus der Zeichnung ab $\overline{Z(0{,}8)} = 4{,}78$ cm. Dann ist

$$Z(0{,}8) = \overline{Z(0{,}8)} \cdot m_z = \frac{4{,}78\text{ cm} \cdot 3}{20\text{ cm}} = 0{,}717\,.$$

13·2. Veränderliche Poldistanz. Während in der vorigen Nummer die Funktion $z(x)$ aus der Differentialgleichung

$$z'(x) = y(x)$$

graphisch ermittelt wurde, kann man durch Einführung einer veränderlichen Poldistanz unmittelbar die Gleichung

$$p(x)\,z'(x) = y(x) \tag{13·9}$$

graphisch integrieren, also das Integral

(13·10) $$z(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y(\xi)}{p(\xi)}\, d\xi$$

aufzeichnen. Die veränderliche Poldistanz bewirkt also die Multiplikation der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion $y(x)$ mit der gegebenen Funktion $\frac{1}{p(x)}$

Man wählt einen Maßstab m_p für die Funktion $p(x)$ und trägt an Stelle der bisher fest gewählten Poldistanz von H cm die Strecken

$$\overline{p(x_i)} = \frac{p(x_i)}{m_p} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

auf der negativen x-Achse auf (Abb. 13·3). Die Konstruktion verläuft dann genau wie in 13·1, nur daß jetzt nicht der feste Pol P, sondern die jeweiligen Pole $P_0, P_1, \ldots$ benutzt werden. An Stelle der Gleichung (13·6) tritt hier

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{Y(x_0)}}{\overline{p(x_0)}} = \frac{Y(x_0)\, m_p}{m_y\, p(x_0)},$$

so daß der Gleichung (13·8) hier die Gleichung für den gesuchten Maßstab

(13·11) $$m_z = \frac{m_x\, m_y}{m_p}$$

entspricht. Man erhält auch hier einen Polygonzug $Z(x)$, den man durch eine glatte Kurve für $z(x)$ ersetzt, die durch die Nullenkreispunkte hindurchgeht.

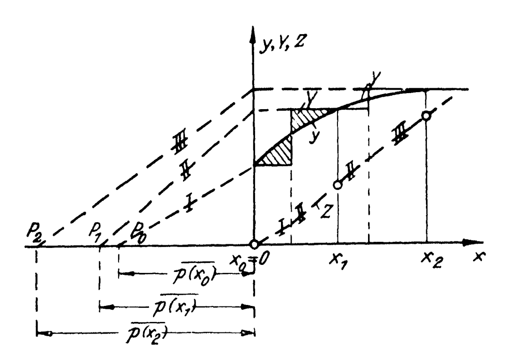


Abb. 13·3. Graphische einfache Integration bei veränderlicher Poldistanz.

Allerdings kann man jetzt aus der Flächengleichheit der schraffierten Flächen (Abb. 13·3) nicht mehr schließen, daß die Nullenkreispunkte exakt richtige Punkte der Kurve für $z(x)$ liefern, sondern man weiß nur, daß bei genügend feiner Einteilung in Teilintervalle (x_i, x_{i+1}) die Funktionen $Z(x)$ und $z(x)$ zu beliebig genauer Übereinstimmung gebracht werden können. Für die praktische Zeichnung wird man jedoch die Intervalleinteilung nicht allzu eng wählen, um keine Anhäufung der unvermeidlichen Zeichenungenauigkeiten entstehen zu lassen. Wenn es auf größere Genauigkeit an-

kommt, ist es besser, die Funktion $\frac{y(x)}{p(x)}$ punktweise zu berechnen und die Integration nach dem Verfahren von 13·1 vorzunehmen.

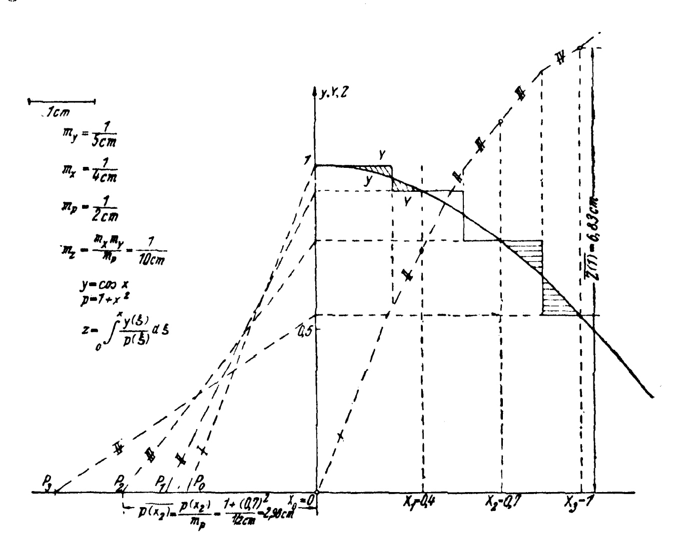


Abb. 13·4. Beispiel zur graphischen einfachen Integration mit veränderlicher Poldistanz.

Beispiel: In Abb. 13·4 ist das Beispiel $y = \cos x$ und $p = 1 + x^2$, also

$$z(x) = \int_0^x \frac{\cos \xi}{1 + \xi^2} \, d\xi$$

behandelt. Aus den gewählten Maßstäben $m_x = \frac{1}{4\,\text{cm}}$, $m_y = \frac{1}{5\,\text{cm}}$, $m_p = \frac{1}{2\,\text{cm}}$ berechnet sich nach (13·11) $m_z = \frac{1}{10\,\text{cm}}$; liest man z. B. an der Stelle $x = 1$ aus der Zeichnung $\overline{z(1)} = 6{,}83$ cm ab, so entspricht dieser Darstellungsgröße der wirkliche Wert $z(1) = \overline{z(1)} \cdot m_z = 0{,}683$.

13·3. Graphische doppelte Integration. Man kann, was für die Anwendungen sehr wichtig ist, eine zweifache Integration graphisch mit einem Schritte ausführen. Vorgelegt sei die Aufgabe, eine Funktion $y(x)$ zu zeichnen, die der Differentialgleichung genügt (von den Randbedingungen wird erst in 13·5 gesprochen):

$$(py')' = g(x)\,. \tag{13.12}$$

Dabei seien $p(x)$ und $g(x)$ gegebene, gezeichnet vorliegende Funktionen. Die graphische Integration beruht darauf, daß man die Lösungsformel (C ist Integrationskonstante)

$$y'(x) = \frac{1}{p(x)} \cdot \left(\int_0^x g(\xi)\, d\xi + C \right) \tag{13·13}$$

ins Zeichnerische übersetzt.

Man trägt die Funktion $g(x)$ über x auf, unterteilt die x-Achse durch Teilpunkte x in eine Anzahl Teilintervalle und bestimmt die zu diesen Teilintervallen gehörigen Flächen $F_1, F_2, \ldots$ der x-g-Kurve. Diese Flächen aneinandergefügt stellen

$$\int_0^x g(\xi)\, d\xi$$

dar (vgl. Abb. 13·5). Nun kann man noch eine Konstante C hinzufügen und erhält einen Punkt P, von dem aus in horizontaler Richtung die Werte der

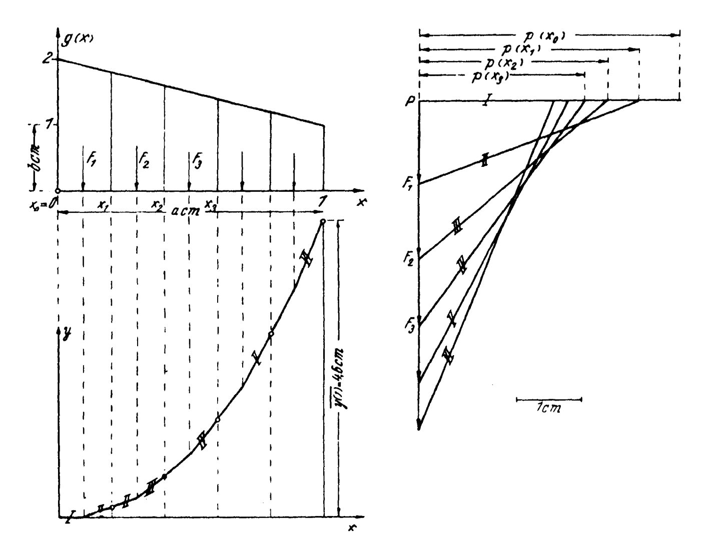


Abb. 13·5. Graphische Bestimmung von $y(x)$ aus $(py')' = g(x)$.

gegebenen Funktion $p(x)$ an den Teilpunkten der x-Achse, also die Werte $p_0 = p(0)$, $p_1 = p(x_1)$, ... aufgetragen werden. Man kann damit die Richtungen y', die sich nach (13·13) berechnen, zeichnen und erhält durch Übertragen dieser Steigungen den Polygonzug für $y(x)$, von dem man die

Werte an den Stellen x_i verwendet (die in Abb. 13·5 durch Nullenkreise gekennzeichneten Punkte), um eine glatte Kurve hindurchzulegen.

Nun muß noch der Maßstab ausgerechnet werden, in dem man die y-Ordinaten erhält. Man hat zunächst Maßstäbe für x und g beim Zeichnen der x-g-Kurve (Abb. 13·5):

$$m_x = \frac{1}{a\text{ cm}}$$

$$m_g = \frac{1}{b\text{ cm}}.$$

Nun werden die Flächen der x-g-Darstellung ausgemessen und aufgetragen, dafür hat man einen Flächenmaßstab:

$$m_F = \frac{C\text{ cm}^2}{1\text{ cm}}.$$

Hat man z. B. eine Fläche von 4 cm² durch 1 cm dargestellt, so ist

$$m_F = \frac{4\text{ cm}^2}{1\text{ cm}}.$$

Weiter hat man einen Maßstab zum Auftragen der p-Werte:

$$m_p = \frac{1}{c\text{ cm}}.$$

Aus diesen Maßstäben hat man nun den y-Maßstab m_y zu berechnen. Zunächst bestimmt man den Maßstab m_f, in dem die Integrale aufgetragen sind. Dabei bedeutet jeder cm nach der obigen Festsetzung m_F cm², und da jeder cm² der x-g-Fläche in Wirklichkeit $m_x \cdot m_g$ bedeutet, stellt jeder cm einen Integralwert $m_F m_x m_g$ dar, d. h. also

$$m_f = m_F \cdot m_x \cdot m_g; \tag{13·14}$$

in diesem Maßstab hätte man auch die Integrationskonstante C aufzutragen, wenn sie etwa gegeben wäre. Nun sind die Neigungen im Verhältnis der Maßstäbe verzerrt, d. h. es ist

$$m_{\operatorname{tg}\beta} = \frac{m_f}{m_p},$$

und daraus folgt schließlich als Maßstab für y

$$m_y = m_x \cdot m_{\operatorname{tg}\beta};$$

also

$$m_y = \frac{m_x^2 \cdot m_g m_F}{m_p} \tag{13·15}$$

Beispiel: Die Abb. 13·5 stellt zugleich die Durchzeichnung für die Funktionen $p = \frac{1}{1+x}$, $g = 2 - x$ dar. Aus den gewählten Maßstäben $m_x = m_p = \frac{1}{4\text{ cm}}$ $m_g = \frac{1}{1\text{ cm}}$, $m_F = \frac{1{,}2\text{ cm}^2}{1\text{ cm}}$ berechnet sich nach (13·15) $m_y = \frac{0{,}3}{1\text{ cm}}$. Z. B. ergibt sich aus der bei $x = 1$ abgelesenen Strecke

$$\overline{y(1)} = 4{,}6\text{ cm der Wert } y(1) = m_y \overline{y(1)} = 1{,}38,$$

während die genaue Lösung

$$y = x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4,$$

die die Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ erfüllt, dort den Wert $y(1) = 1.375$ annimmt.

13·4. Sonderfall des gewöhnlichen Seileckes. Als wichtiger Sonderfall werde der Fall $p = 1$ herausgegriffen (Abb. 13·6); dann integriert man also die Differentialgleichung:

(13·16) $$y'' = g(x).$$

Die ganze p-Skala schrumpft auf einen Punkt, den „Pol", zusammen, und man hat die gewöhnliche Seileckskonstruktion[1]). Hierbei ist also

$$m_p = \frac{1}{c\text{ cm}} = \frac{1}{\text{Polentfernung } H \text{ cm}} = \frac{1}{H},$$

und man erhält aus (13·15) als gesuchte Maßstabformel:

(13·17) $$m_y = H \cdot m_g \cdot m_F \cdot m_x^2.$$

Ein Beispiel wird in der nächsten Nummer besprochen.

13·5. Einarbeitung der Randbedingungen. Bei $y'' = g(x)$ hat $y'' = 0$ die Lösung $y = c_1 + c_2 x$: man kann also eine beliebige lineare Funktion hinzufügen, man braucht die y-Ordinaten nicht von der x-Achse aus zu messen, sondern kann sie von einer willkürlichen Geraden aus zählen und erhält stets eine Lösung der Differentialgleichung (13·16). Diese Gerade kann man als „Schlußlinie" so legen, daß y oder y' vorgegebene Randwerte annehmen, und kann auf diese Weise vorgeschriebene Randbedingungen bequem erfüllen.

Beispiel: Abb. 13·6 zeigt die Durchführung der Seileckskonstruktion für das Beispiel $y'' = g(x) = \sin x$ im Intervall $0 \leq x \leq 2$. Der Pol kann in beliebiger Höhe angenommen werden. Es werden die Maßstäbe

$$m_g = \frac{1}{2\text{ cm}}, \quad m_x = \frac{1}{2{,}5\text{ cm}}, \quad H = 2{,}5\text{ cm}, \quad m_F = \frac{1{,}25\text{ cm}^2}{1\text{ cm}}$$

verwendet. Daraus berechnet sich nach (13·17)

$$m_y = \frac{1}{4\text{ cm}}.$$

Durch die mit Nullenkreisen versehenen Punkte des Seilpolygons wird eine glatte Kurve gelegt. Wir betrachten zwei spezielle Fälle von Randbedingungen:

A. $y(0) = y(2) = 0$. Die Schnittpunkte der beiden äußersten „Seilstrahlen" I und V mit den zu $x = 0$ und $x = 2$ gehörigen Ordinaten legen die „Schlußlinie" fest. Man zählt die Ordinaten bis zu dieser Schlußlinie und liest z. B. bei $x = 1$ die Darstellungsgröße

$$\overline{y(1)} = -1{,}55\text{ cm}$$

ab und erhält daraus $y(1) = \overline{y(1)}\, m_y = -0{,}387$.

[1]) Vgl. z. B. W. Schlink, Technische Statik. Berlin 1939, S. 110ff.

B. $y(0) = 0{,}25$; $y'(2) = 0{,}5$. Jetzt haben wir von der Schlußlinie einen Punkt S (Abb. 13·6), indem wir die dem Anfangswert $y(0) = 0{,}25$ entsprechende Strecke

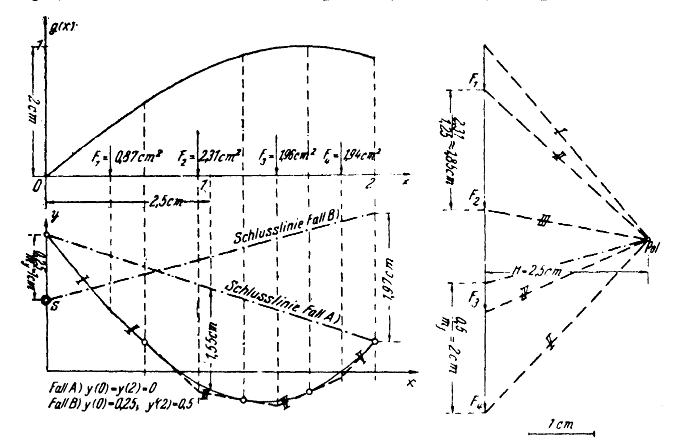


Abb. 13·6. Seileckskonstruktion zur doppelten Integration.

$\frac{0{,}25}{m_y} = 1$ cm auf der Ordinate $x = 0$ auftragen; ferner kennen wir die Steigung der Schlußlinie; es soll $y'(2) = 0{,}5$ sein. Nun berechnen wir nach (13·14) den Maßstab, in dem in der Polfigur die Flächen F aufgetragen waren[1]):

$$m_f = m_F\, m_x\, m_g = \frac{1}{4\ \mathrm{cm}}\,.$$

Durch Auftragen der Strecke $\frac{0{,}5}{m_f} = 2$ cm in der Polfigur hat man die Richtung der Schlußlinie und damit die Schlußlinie vollständig. Man liest z. B. ab $\overline{y(2)} = -1{,}97$ cm und damit $y(2) = \overline{y(2)}\, m_y = -0{,}492$.

Nicht so übersichtlich ist die Einarbeitung der Randbedingungen bei der in 13·3 besprochenen graphischen Integration der Gleichung $(p y')' = g(x)$. Hier ist eine beliebige lineare Funktion $c_1 + c_2 x$ für $p \neq$ const keine Lösung von $(p y')' = 0$, und man hat nicht mehr die bequeme Möglichkeit, Randbedingungen durch Legen einer geneigten Schlußlinie einzuarbeiten[2]). Man hat die beiden Freiheiten:

1. Punkt P in beliebige Höhe legen,
2. mit $y(x_0)$ in beliebiger Höhe anfangen.

---

[1]) Das ist zugleich der Maßstab, in dem auf dieser Geraden die Werte y' aufzutragen sind. Der in 13·3 mit $m_{\mathrm{tg}\,\beta}$ bezeichnete Maßstab ist ein anderer und gibt an, wie man in der Polfigur aus den Tangenswerten der Polstrahlwinkel den Wert von y' zu berechnen hätte.

[2]) Die Darstellung bei K. Hohenemser, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer, Berlin 1932, Bd. I, Heft 4, S. 55, ist unrichtig.

Hat man eine Randbedingung für y' und eine für y, so ist das Vorgehen einfach. Durch y' ist der erste bzw. der letzte „Seilstrahl" festgelegt, die Übertragung in den p-Plan legt die Höhe der p-Linie, d. h. den Punkt P fest. Hat man dagegen andere Randbedingungen, z. B. $y(0) = y(a) = 0$, so muß man zwei Seilecke zu zwei verschiedenen Punkten P zeichnen und nachher die so erhaltenen Funktionen y_1, y_2 linear mischen:

$$y = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 + c_2}.$$

Bei den genannten Bedingungen $y(0) = y(a) = 0$ z. B. wird man sofort $y_1(0) = y_2(0) = 0$ erreichen und das Verhältnis $c_1 : c_2$ so bestimmen, daß dann auch $y(a) = 0$ wird.

13·6. Graphische Durchführung des Verfahrens der schrittweisen Näherungen. Bei dem in § 12 beschriebenen Verfahren der schrittweisen Näherungen braucht man nach 12·5 zwei Funktionen $F_0(x)$, $F_1(x)$ mit $M[F_1] = N[F_0]$, von denen F_1 alle und F_0 einen gewissen Teil der Randbedingungen erfüllt. Zwei solche Funktionen kann man bei vielen technischen Problemen bequem auf graphischem Wege aufstellen.

Wir sprechen zunächst von den einfacheren Typen der speziellen Eigenwertprobleme $M[y] = \lambda g_0 y$. Bei diesen wählt man eine den erwarteten Verlauf der ersten Eigenfunktion y_1 wiedergebende Funktion F_0 und bestimmt F_1 durch graphische Integration mit Hilfe von Seilecken. Das gelingt bei den Problemen, bei denen $M[y] = (f_2 y'')''$ oder $= (f_1 y')'$ ist, ohne weiteres. Wir betrachten als Beispiel einen schwingenden, beiderseits gelenkig gelagerten Stab mit gegebener (veränderlicher) Biegesteifigkeit $\alpha(x)$ und gegebener Massenverteilung $g_0(x)$ (Abb. 13·7). Dann hat man

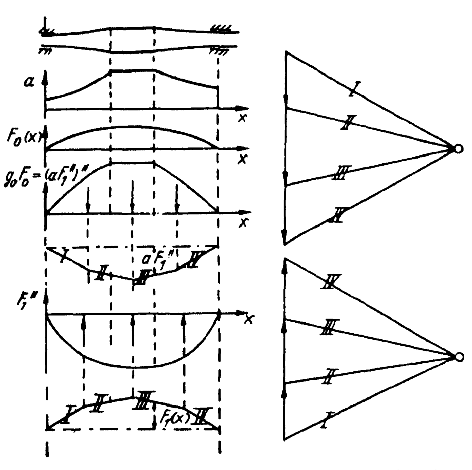


Abb. 13·7. Graphische Iteration bei $(\alpha y'')'' = \lambda g_0 y$.

$$(\alpha F_1'')'' = g_0 F_0;$$

man schätzt nun F_0, zeichnet $g_0 F_0$, erhält durch zweimalige Integration (erstes Seileck) $\alpha F_1''$, hat damit auch F_1'' und bekommt durch nochmalige doppelte Integration (zweites Seileck) F_1. Man geht stets so vor, daß man graphisch immer nur integriert und niemals differenziert. Die Auswertung des Verfahrens erfolgt durch Berechnung der SCHWARZschen Konstanten und Quotienten nach (12·4) und (12·8):

$$a_0 = \int_a^b F_0 N[F_0]\,dx = \int_a^b g_0 F_0^2\,dx$$

$$a_1 = \int_a^b F_0 N[F_1]\,dx = \int_a^b g_0 F_0 F_1\,dx$$

$$a_2 = \int_a^b F_1 N[F_1]\,dx = \int_a^b g_0 F_1^2\,dx\,.$$

Die hierbei erforderlichen Integrationen werden graphisch mittels Planimeter oder rechnerisch etwa durch Benutzung der SIMPSONschen Regel vorgenommen. Die Einschließung des kleinsten Eigenwertes λ_1 in Schranken erfolgt weiter nach (12·21), wie in 12·5 beschrieben.

Wir wenden uns nun wieder allgemeineren Fällen zu. Die Bestimmung zweier Funktionen F_0 und F_1, die die in § 12 geforderten Bedingungen erfüllen, gelingt allgemein bei den Problemen der Gestalt

$$M[y] = \lambda [g_n(x)\, y^{(n)}]^{(n)} \tag{13·18}$$

$$[f_m(x)\, y^{(m)}]^{(m)} = \lambda N[y]\,. \tag{13·19}$$

Die Gleichung (13·18) ist uns von der Eingliedklasse in 4·7 her bekannt, wir legen sie der folgenden Ausführung zugrunde, bei der Gleichung (13·19) kann man genau entsprechend vorgehen. Bei (13·18) soll also

$$M[F_1] = [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}$$

gelten.

In $M[F_1]$ kommt als höchstes Glied

$$[f_m(x) F_1^{(m)}]^{(m)}$$

vor. Man kann dann so vorgehen:

a) Man wählt sich die höchste Ableitung von F_1, also $F_1^{(2m)}$, und gewinnt die sämtlichen niedrigeren Ableitungen $F_1^{(2m-1)}, \ldots, F_1$ durch Integrieren.

b) Man bildet dann $M[F_1]$ und hat $M[F_1] = [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}$.

c) Man integriert n-mal die Funktion $M[F_1]$ und bekommt $g_n(x) F_0^{(n)}$.

d) Division durch $g_n(x)$ gibt $F_0^{(n)}$; n-malige Integration liefert schließlich F_0.

Nun sind die Randbedingungen zu berücksichtigen; F_1 muß alle Randbedingungen erfüllen, F_0 im allgemeinen nur einen Teil. In vielen Fällen,

vgl. die Tafel VII, lassen sie sich bei den Integrationen (z. B. durch passende Schlußlinie) ohne weiteres einarbeiten, manchmal jedoch stößt man dabei auf Schwierigkeiten. Man kann jedoch stets durchkommen, indem man Gebrauch macht von der Überlagerung, die wegen der Linearität des Problems erlaubt ist; man führt den ganzen Vorgang mit mehreren Funktionen $F_1^{((1))}, F_1^{((2))}, \ldots, F_1^{((r))}$ durch[1]) und bestimmt in dem Ansatz

$$F_1 = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu F_1^{((\nu))}$$

die Konstanten c_ν so, daß F_1 und F_0 allen noch zu erfüllenden Randbedingungen genügen.

In der Tafel VII ist für eine Anzahl häufiger vorkommender Probleme angegeben, wie man zwei den gestellten Forderungen genügende Funktionen F_0, F_1 ermitteln kann.

13·7. Graphische Bestimmung von μ_1. In 12·5 und 13·6 wurde ein graphisches Verfahren beschrieben, bei welchem man als obere Schranken für den ersten Eigenwert λ_1 die beiden SCHWARZschen Quotienten μ_1 und μ_2 und mit deren Hilfe auch eine untere Schranke für λ_1 nach (12·19) ermittelt; statt dessen kann man in vielen Fällen mit geringerer Arbeit (im wesentlichen mit der Hälfte der graphisch durchzuführenden Integrationen) die Zahl μ_1 allein gewinnen, die ja eine obere Schranke für λ_1 darstellt: die Zahl μ_1 ist dann im allgemeinen weniger genau als μ_2, und man weiß auch nichts über den Fehler $\mu_1 - \lambda_1$; aber bei vielen technischen Aufgaben wird die Genauigkeit von μ_1 ausreichen, insbesondere wenn man die Funktion $F_0(x)$, die eine Annäherung für die erste Eigenfunktion $y_1(x)$ sein soll, gut geschätzt hat.

Wir greifen als Beispiel die Biegeschwingungen eines Stabes mit der veränderlichen Biegesteifigkeit $\alpha(x)$, der Länge l, der Dichte ϱ und der Querschnittsfläche $F(x)$ heraus. Der Stab sei etwa am einen Ende eingespannt, am anderen frei, dann hat man nach 2·3 das Eigenwertproblem:

$$(13{\cdot}20) \qquad (\alpha y'')'' = \lambda \varrho F y; \quad y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0\,.$$

Nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen gehen wir von einer Funktion $F_0(x)$ aus, die den erwarteten Verlauf der ersten Eigenschwingungsform $y_1(x)$ wiedergibt, die insbesondere die wesentlichen Randbedingungen (in der Bezeichnungsweise von 4·2)

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0$$

[1]) Hochgestellte Indizes in Doppelklammern bedeuten keine Ableitungen, sondern dienen nur zur Unterscheidung der einzelnen Funktionen.

Tafel VII.

Beispiele für die graphische Durchführung des Verfahrens der schrittweisen Näherungen.

Differentialgleichung	Randbedingungen	Man wählt eine Funktion	Vorgehensart zur Aufstellung von F_0 und F_1 (so daß (12·20) angewandt werden kann)
$-(f_1 y')' = \lambda g_0 y$	$\begin{cases} a\,y(0) + b\,y'(0) = 0 \\ c\,y(l) + d\,y'(l) = 0 \end{cases}$	$F_0(x)$, erfüllt die Randbedingungen	$h_0 = g_0 F_0$ bilden; $F_1(x)$ durch ein Seileck (notfalls durch zwei Seilecke, vgl. 13·5) aus $(f_1 F_1)' = -h_0$ so ermitteln, daß es die Randbedingungen erfüllt
$-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y$	$y(a) = y(b) = 0$	$w(x)$ mit $w(a) = w(b) = 0$	$F_1(x)$ mit $F_1(a) = F_1(b) = 0$ durch Seileck aus $(f_1 F_1')' = -w$; dann $F_0 = \frac{1}{g_0}(w + f_0 F_1)$
	Bei anderen Randbedingungen von mehreren gewählten Funktionen w ausgehen und sie so linear kombinieren, daß F_0 und F_1 die Randbedingungen erfüllen		
$(f_2 y'')'' = \lambda g_0 y$	$\begin{cases} y(0) = y(l) = 0 \\ y''(0) = y''(l) = 0 \end{cases}$	$F_0(x)$, erfüllt die Randbedingungen	$h_1(x)$ durch Seileck aus $h_1'' = g_0 F_0$, $h_1(0) = h_1(l) = 0$ $F_1(x)$ durch Seileck aus $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$, $F_1(0) = F_1(l) = 0$
	$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(l) = y'''(l) = 0 \end{cases}$	$F_0(x)$, erfüllt die Randbedingungen	$h_1(x)$ durch Seileck aus $h_1'' = g_0 F_0$, $h_1(l) = h_1'(l) = 0$ $F_1(x)$ durch Seileck aus $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$, $F_1(0) = F_1'(0) = 0$
	$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y(l) = y'(l) = 0 \end{cases}$	$F_0(x)$, erfüllt die Randbedingungen	$h_1(x)$ durch Seileck aus $h_1'' = g_0 F_0$, $h_1(0) = h_1'(0) = 0$ zwei Integrationskonstanten c_1, c_2 mitführen $F_1(x)$ durch drei Seilecke aus $F_1(0) = F_1'(0) = 0$, $F_1'' = \frac{h_1}{f_2} + c_1 \cdot \frac{1}{f_2} + c_2 \frac{x}{f_2}$ und c_1, c_2 so bestimmen, daß $F_1(l) = F_1'(l) = 0$

Tafel VII (Fortsetzung).

Differentialgleichung	Randbedingungen	Man wählt eine Funktion	Vorgehensart zur Aufstellung von F_0 und F_1 (so daß (12·20) angewandt werden kann)
$(f_2 y'')'' - (f_1 y')' = \lambda g_0 y$	Je nach den Randbedingungen das Verfahren notfalls mit mehreren Funktionen $w(x)$ durchführen und diese so kombinieren, daß F_0 und F_1 die Randbedingungen erfüllen	$w(x)$	$h_1(x)$ durch Seileck aus $h_1'' = w$ $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$; durch zwei einfache Integrationen F_1' und F_1; dann $F_0 = \frac{1}{g_0}[-f_1' F_1' - f_1 F_1'' + w]$
$(f_2 y'')'' + f_0 y = -\lambda (g_1 y')'$		$w(x)$	$h_1(x)$ durch Seileck aus $h_1'' = w$ $F_1(x)$ durch Seileck aus $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$ $F_0(x)$ durch Seileck aus $-(g_1 F_0')' = w + f_0 F_1$
$(f_2 y'')'' = \lambda [g_0 y - (g_1 y')']$		$w(x)$	$F_0(x)$ durch Seileck aus $(g_1 F_0')' = w$ $h_1(x)$ durch Seileck aus $h_1'' = g_0 F_0 - w$ $F_1(x)$ durch Seileck aus $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$

erfüllt. Zu ihr würde man nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen eine Funktion $F_1(x)$, die durch

$$(\alpha F_1'')'' = \varrho F F_0, \quad F_1(0) = F_1'(0) = F_1''(l) = F_1'''(l) = 0$$

festgelegt ist, durch zwei Seileckskonstruktionen bestimmen; nämlich durch das erste Seileck würde man eine Funktion $G(x) = \alpha F_1''$ (im wesentlichen das Biegemoment) aus

$$G'' = \varrho F F_0, \quad G(l) = G'(l) = 0 \tag{13·21}$$

und durch das zweite Seileck $F_1(x)$ aus

$$F_1'' = \frac{1}{\alpha} G(x), \quad F_1(0) = F_1'(0) = 0 \tag{13·22}$$

ermitteln.

Dann würde man die SCHWARZschen Quotienten μ_1 und μ_2 nach (12·4), (12·8) aus

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1}; \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2}$$

mit

$$a_0 = \int_0^l \varrho F F_0^2 \, dx; \quad a_1 = \int_0^l \varrho F F_0 F_1 \, dx; \quad a_2 = \int_0^l \varrho F F_1^2 \, dx \tag{13·23}$$

bestimmen. Nun läßt sich aber a_1 auch in der Form schreiben:

$$a_1 = \int_0^l G'' F_1 \, dx = \int_0^l G F_1'' \, dx = \int_0^l \frac{1}{\alpha} G^2 \, dx, \tag{13·24}$$

und man sieht, daß man a_0, a_1 und damit μ_1 bereits aus F_0 und G, also ohne Zeichnen des zweiten Seileckes für F_1, gewinnen kann.

Beispiel: Abb. 13·8 stellt die Durchführung des Verfahrens an einem Beispiel dar. Es liegt ein Problem (13·20) vor, und es werden zunächst „dimensionslose" Größen ξ, α^*, F^*, λ^* eingeführt durch

$$x = l\xi, \quad \alpha = \alpha(0)\alpha^*(\xi), \quad F = F(0)F^*(\xi), \quad \lambda^* = \frac{\lambda \varrho F(0) l^4}{\alpha(0)}.$$

Dann lautet die Gleichung (13·20), wenn Striche jetzt Ableitungen nach ξ bedeuten,

$$(\alpha^* y'')'' = \lambda^* F^* y. \tag{13·25}$$

In Abb. 13·8 sind α^* und F^* als Funktionen von ξ gezeichnet vorgegeben. Eine Funktion $F_0(\xi)$, die den erwarteten Verlauf der ersten Eigenschwingungsform ungefähr wiedergeben soll, wird durch ein Seileck gemäß (13·21) zu einer Funktion G integriert nach

$$G'' = F^* F_0, \quad G(1) = G'(1) = 0.$$

Die durch Nullenkreise gekennzeichneten Punkte des Seileckes sind richtige Punkte für die Funktion $G(\xi)$, im übrigen hat man das Seileck durch eine

glatte Kurve zu ersetzen, was in der Abb. 13·8 unterlassen ist, um die Übersichtlichkeit nicht zu stören.

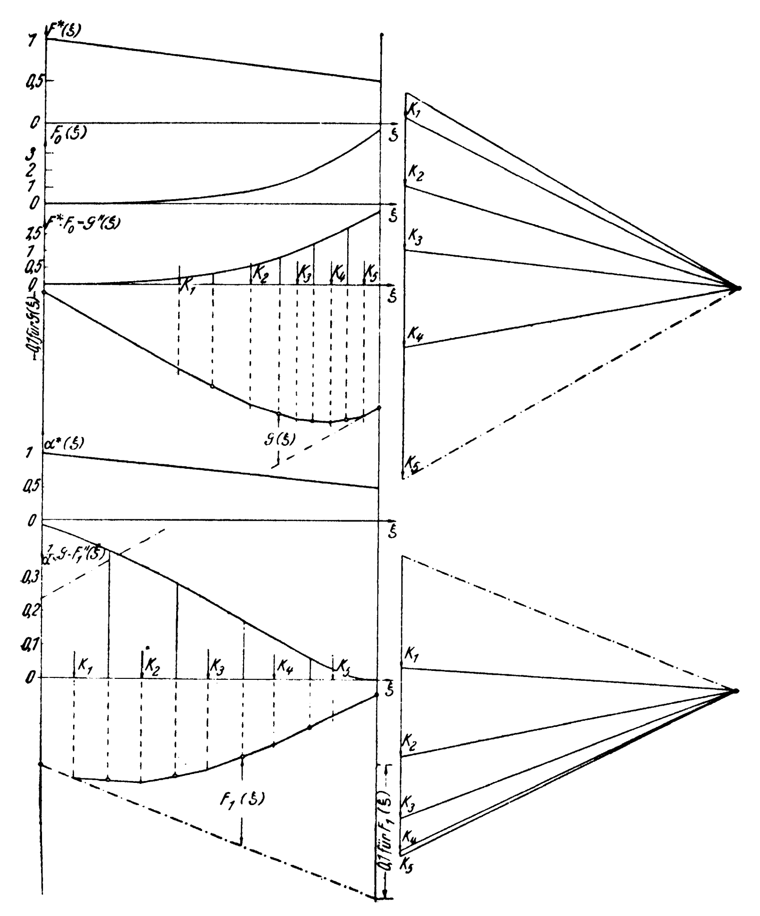


Abb. 13·8. Graphische Bestimmung des kleinsten Eigenwertes bei den Biegeschwingungen eines Stabes veränderlicher Biegesteifigkeit.

Die Maßstäbe lassen sich nach (13·17) unmittelbar berechnen, in Abb. 13·8 sind an Stelle der Maßstäbe die danach berechneten Skalen eingezeichnet. Aus F_0 und G können nun nach Gleichung (13·23) und (13·24) die SCHWARZschen Konstanten a_0 und a_1 bestimmt werden, man erhält bei Ausmessung

der Ordinaten und angenäherter Auswertung der Integrale nach der SIMPSONschen Regel[1])

$$a_0 = 1{,}337; \quad a_1 = 0{,}0620; \quad \mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 21{,}6 .$$

Einen genaueren Wert erhält man beim Zeichnen eines zweiten Seileckes, also bei Bestimmung von F_1 gemäß (13·22) aus

$$F_1'' = \frac{1}{\alpha^*} G, \qquad F_1(0) = F_1'(0) = 0 .$$

Dann bekommt man nach (13·23) $a_2 = 0{,}00322$ und die obere Schranke für den ersten Eigenwert

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 19{,}25 .$$

§ 14. Ergänzungen.

14·1. Das Verfahren der schrittweisen Näherungen bei partiellen Differentialgleichungen. Wie bereits in 12·1 betont, läßt sich das Verfahren der schrittweisen Näherungen grundsätzlich bei beliebigen Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen

$$M[z] = \lambda N[z] \tag{14·1}$$

anwenden; man kann nach der Vorschrift (12·1) Funktionen $F_0, F_1, F_2, \ldots,$ jetzt von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots,$ berechnen und mit ihnen nach (12·2) Näherungswerte Λ für die Eigenwerte λ berechnen. Um aber über die Λ bestimmte Aussagen machen zu können, muß man weitergehende Voraussetzungen treffen, und zwar wollen wir dieselben Voraussetzungen wie in 11·2 machen. Die Differentialgleichung laute:

$$M[z] = \lambda g_0 z \tag{14·2}$$

für eine Funktion z von zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$; wir werden der Einfachheit halber nur x, y schreiben; $g_0(x, y)$ sei stetig und positiv, am Rande Γ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ seien Randbedingungen

$$U_\mu[z] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k) \tag{14·3}$$

wie in (6·2) vorgegeben. Die Eigenwertaufgabe sei, vgl. (6·3) und (6·4), selbstadjungiert, volldefinit, besitze eine GREENsche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ und einen Kern K:

$$K(x, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) \sqrt{g_0(x, y) g_0(\xi, \eta)} , \tag{14·4}$$

[1]) Das hier gegebene Beispiel ist ganz grob und dient nur zur Erläuterung der Methode. Durch Anlage einer größeren Zeichnung und sorgfältigere Wahl der Ausgangsfunktion $F_0(x)$ lassen sich die Ergebnisse erheblich verbessern.

der symmetrisch, quadratisch integrabel und von mittlerer Stetigkeit sei, d. h. man soll die Theorie der Integralgleichungen aus 7·2 anwenden können.

Geht man aus von einer Vergleichsfunktion $F_0(x, y)$ (d. h. man kann $M[F_0]$ bilden, F_0 erfüllt die Randbedingungen $U_\mu[F_0] = 0$ und es ist $F_0 \not\equiv 0$) und bestimmt weitere Vergleichsfunktionen F_n nach

$$M[F_n] = g_0 F_{n-1}; \quad U_\mu[F_n] = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{14·5}$$

so kann man die SCHWARZschen Konstanten

$$a_n = \iint_{\mathfrak{B}} g_0 F_i F_{n-i}\, dx\, dy \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14·6}$$

und die Quotienten

$$\mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{14·7}$$

bilden. Dann läßt sich die Tatsache

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \mu_3 \geqq \cdots \geqq \lambda_1 \tag{14·8}$$

und unter der Voraussetzung $\lambda_2 \geqq l_2 > \mu_{n+1}$ die Hauptformel (12·19)

$$\mu_{n+1} - \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\dfrac{l_2}{\mu_{n+1}} - 1} \leqq \lambda_1 \leqq \mu_{n+1} \tag{14·9}$$

fast wörtlich genau so beweisen wie in § 12. Denn zum Beweis der monotonen Abnahme der μ_n in 12·3 braucht man nur die Selbstadjungiertheit und Volldefinitheit des Problems[1]).

Die μ_{2n} mit geradem Index $2n$ lassen sich wieder als RAYLEIGHsche Quotienten schreiben, und zwar ist nach (11·15) entsprechend zu (12·9)

$$\mu_{2n} = R[F_n].$$

Nach der in 11·2 dargestellten Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes sind die μ_{2n} und damit alle μ_n obere Schranken für λ_1; damit ist (14·8) bewiesen. Die μ_{2n-1} mit ungeradem Index hängen mit dem zweiten in 11·2 genannten Minimalprinzip (11·25) für den kleinsten Eigenwert zusammen; es ist μ_1 gleich dem in (11·25) rechtsstehenden Quotienten, und entsprechend ist μ_{2n-1} gleich dem Quotienten in (11·25), wenn man F_n an Stelle von F_1 schreibt.

Der Beweis für (14·9) kann genau von 12·4 übernommen werden, man hat nur sinngemäß z, $g_0 z$, $\iint_{\mathfrak{B}} \cdots dx\, dy$, an Stelle von y, $N[y]$, $\int_a^b \cdots dx$ zu setzen.

---

[1]) Das monotone Abnehmen der μ_n gilt also auch bei den allgemeineren partiellen Differentialgleichungen der Gestalt $M[z] = \lambda N[z]$, sofern sie nur selbstadjungiert und volldefinit sind.

14·2. Der Einschließungssatz von Kryloff-Bogoliubov für die Eingliedklasse[1]). Dieser Einschließungssatz benutzt den Entwicklungssatz aus 10·8 und gilt in derselben Allgemeinheit. Es liege also ein selbstadjungiertes volldefinites Problem der Eingliedklasse (4·22), (4·8) mit der Differentialgleichung

$$M[y] = \lambda N[y] \equiv (-1)^n \lambda [g_n y^{(n)}]^{(n)}$$

mit $g_n(x) \neq 0$ vor, und unter den Randbedingungen mögen die Bedingungen

$$(14\cdot10) \quad y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0$$

vorkommen. Dann lautet der

Einschließungssatz von Kryloff-Bogoliubov: *Unter den (soeben wiederholten) Voraussetzungen des Entwicklungssatzes aus* 10·8 *berechne man für zwei Funktionen $F_0(x)$ und $F_1(x)$, von denen $F_0(x)$ nach Zusatz* 1 *von* 10·3 *halbzulässig und $F_1(x)$ eine Vergleichsfunktion ist, und die in der Beziehung $M[F_1] = N[F_0]$ stehen, die Quotienten μ_1 und μ_2 nach* (12·20). *Dann liegt zwischen den beiden Zahlen*

$$(14\cdot11) \qquad \mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2} \quad \text{und} \quad \mu_1 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2}$$

mindestens ein Eigenwert des vorgelegten Problems.

Für die speziellen Eigenwertprobleme $M[y] = \lambda g_0 y$ kann man die Voraussetzung (14·10) und die Bedingung der Halbzulässigkeit von $F_0(x)$ streichen, denn dann ist jede stetige Funktion $F_0(x)$ halbzulässig, und die Spezialisierung des Satzes lautet: Ist $F_1(x)$ eine Vergleichsfunktion, so bilde man die Zahlen

$$a_0 = \int_a^b \frac{1}{g_0}(M[F_1])^2\,dx, \qquad a_1 = \int_a^b F_1 M[F_1]\,dx, \qquad a_2 = \int_a^b g_0 F_1^2\,dx,$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1}, \qquad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2}.$$

Dann liegt zwischen den Schranken (14·11) mindestens ein Eigenwert.

Beweis: Nach den Voraussetzungen liegen zwei Funktionen F_0, F_1 mit

$$M[F_1] = N[F_0]$$

vor. F_1 erfüllt die Randbedingungen und ist eine Vergleichsfunktion, sie läßt sich also in eine nach dem Satz in 10·8 $(m-1)$-mal gliedweise differen-

[1]) Für einen Spezialfall findet sich der in der Literatur oft nach Weinstein benannte Satz bei N. Kryloff und N. Bogoliubov, Bull. Acad. Sci. URSS., Classe phys. math. Leningrad (1929) 471. Für die speziellen Eigenwertprobleme ist der Satz bewiesen von H. D. Weinstein, Proc. nat. Acad. Sci. Washington 20 (1934) 529, und unter schwächeren Voraussetzungen von E. Kamke, Math. Z. 45 (1939) 788.

zierbare Reihe nach den normierten Eigenfunktionen y_p entwickeln:

$$F_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p y_p, \text{ mit (nach (10·4)) } b_p = \int_a^b F_1 N[y_p]\,dx,$$

wobei (auch für die differenzierten Reihen) die Reihen der absoluten Beträge der Glieder im Intervall a, b gleichmäßig konvergieren. Mit F_0 und F_1 werden nach (12·20) die SCHWARZschen Konstanten a_0, a_1, a_2 und Quotienten μ_1, μ_2 gebildet. Dann folgt bei Berücksichtigung der Selbstadjungiertheit

$$(14{\cdot}12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\int_a^b (\mu_2 F_1 - F_0)(\mu_2 N[F_1] - N[F_0])\,dx}{\int_a^b F_1 N[F_1]\,dx} &= \mu_2^2 - 2\mu_2 \frac{\int_a^b F_1 N[F_0]\,dx}{\int_a^b F_1 N[F_1]\,dx} + \frac{\int_a^b F_0 N[F_0]\,dx}{\int_a^b F_1 N[F_1]\,dx} \\ &= \mu_2^2 - 2\mu_2 \cdot \mu_2 + \mu_1 \cdot \mu_2 = (\mu_1 - \mu_2)\mu_2 . \end{aligned}\right.$$

Der linksstehende Ausdruck läßt sich umformen. Im Zähler steht, wenn man zur Abkürzung $\psi = \mu_2 F_1 - F_0$ setzt, der Ausdruck

$$\int_a^b \psi N[\psi]\,dx,$$

und für diesen Ausdruck gilt nach der PARSEVALschen Ungleichung (10·13)

$$\int_a^b \psi N[\psi]\,dx \geq \sum_{p=1}^{\infty} c_p^2,$$

wenn man mit c_p die FOURIER-Koeffizienten von ψ bezeichnet:

$$c_p = \int_a^b \psi N[y_p]\,dx = \mu_2 \int_a^b F_1 N[y_p]\,dx - \int_a^b F_0 N[y_p]\,dx .$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_a^b F_0 N[y_p]\,dx &= \int_a^b y_p N[F_0]\,dx = \int_a^b y_p M[F_1]\,dx = \int_a^b F_1 M[y_p]\,dx \\ &= \lambda_p \int_a^b F_1 N[y_p]\,dx = \lambda_p b_p, \end{aligned}$$

also

$$c_p = b_p(\mu_2 - \lambda_p) .$$

Somit gilt für den Zähler der linken Seite von (14·12)

$$\int_a^b \psi N[\psi]\,dx \geq \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 (\mu_2 - \lambda_p)^2,$$

während der Nenner auf folgende Weise ausgerechnet werden kann (die Reihe für F_1 darf wegen $n \leqq m - 1$ gliedweise n-mal differenziert werden):

$$\int_a^b F_1 N[F_1]\,dx = \int_a^b F_1 (-1)^n [g_n F_1^{(n)}]^{(n)}\,dx = \int_a^b F_1^{(n)} g_n F_1^{(n)}\,dx$$

$$= \int_a^b \sum_{p=1}^{\infty} b_p y_p^{(n)} \cdot g_n F_1^{(n)}\,dx$$

$$= \int_a^b \sum_{p=1}^{\infty} b_p F_1 N[y_p]\,dx = \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 .$$

Wenn nicht nur $n \leqq m - 1$, sondern sogar $2n \leqq m - 1$ ist, darf man die Reihe für F_1 gliedweise $2n$-mal differenzieren und erhält dann das letzte Ergebnis kürzer durch die Rechnung

$$\int_a^b F_1 N[F_1]\,dx = \sum_{p,q=1}^{\infty} \int_a^b b_p y_p b_q N[y_q]\,dx = \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 .$$

Somit ergibt (14·12)

$$\frac{\sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 (\mu_2 - \lambda_p)^2}{\sum_{p=1}^{\infty} b_p^2} \leqq (\mu_1 - \mu_2)\mu_2 . \tag{14·13}$$

Ist nun λ_j der μ_2 am nächsten gelegene Eigenwert (oder einer von den beiden möglicherweise von μ_2 gleich weit entfernten Eigenwerten), so gilt für alle p

$$(\mu_2 - \lambda_p)^2 \geqq (\mu_2 - \lambda_j)^2,$$

und aus (14·13) folgt

$$(\mu_2 - \lambda_j)^2 \leqq (\mu_1 - \mu_2)\mu_2$$

oder, wie in (14·11) behauptet,

$$\mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2} \leqq \lambda_j \leqq \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2} .$$

14·3. Beweis der Hauptformel (12·19) mit Hilfe des Entwicklungssatzes. Die Formeln des § 12 für das Verfahren der schrittweisen Näherungen lassen sich auch bequem und in durchsichtiger Weise mit Hilfe des Entwicklungssatzes (§ 10) beweisen, und diese Art des Vorgehens soll im folgenden kurz dargestellt werden. In § 12 wurde eine etwas umständlichere, aber dafür weiterreichende Methode benutzt; es waren dort allgemeine Eigenwertprobleme zugelassen, während der Entwicklungssatz vorläufig noch an die Voraussetzungen der Eingliedklasse gebunden ist. Zudem ist die für die Anwendbarkeit des Entwicklungssatzes notwendige Voraussetzung, daß $F_0(x)$ eine Vergleichsfunktion ist, bei technischen Problemen oft nicht erfüllt oder nur unbequem erfüllbar.

Die Eigenwertaufgabe (4·5) bis (4·8) erfülle die in 10·8 für die Gültigkeit des Entwicklungssatzes gemachten Voraussetzungen, insbesondere habe die Differentialgleichung die Gestalt

$$M[y] = \lambda N[y] = \lambda(-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}, \tag{14·14}$$

und es sei hier überdies $2n \leq m - 1$[1]). Wir gehen aus von einer Vergleichsfunktion $F_0(x)$. Diese läßt sich dann in eine Reihe nach den Eigenfunktionen y_i entwickeln:

$$F_0(x) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i y_i(x), \tag{14·15}$$

und man darf die Reihe gliedweise $(m-1)$-mal, also insbesondere $2n$-mal, differenzieren; für die Reihe (14·15) und auch für die differenzierten Reihen konvergieren die Reihen der absoluten Beträge gleichmäßig, daher ist

$$N[F_0] = \sum_{i=r}^{\infty} c_i N[y_i]. \tag{14·16}$$

Die Summe (14·15) beginnt dabei mit einer Nummer $i = r$, wobei $r \geq 1$ sein kann. Es ist damit zugelassen, daß F_0 keine Komponenten nach den ersten $(r-1)$ Eigenfunktionen hat. In (14·15) kann dann $c_r \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \frac{y_i(x)}{\lambda_i}$$

erfüllt die Gleichung

$$M[\varphi] = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \frac{M[y_i]}{\lambda_i} = \sum_{i=r}^{\infty} c_i N[y_i] = N[F_0]$$

und die Randbedingungen (4·8), d. h. $\varphi(x)$ ist gleich der Funktion $F_1(x)$, die nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen aus $F_0(x)$ hervorgeht. Ebenso folgt für die weiteren $F_2(x), F_3(x), \ldots$ allgemein

$$F_k(x) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \frac{y_i(x)}{(\lambda_i)^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14·17}$$

Nun lassen sich die SCHWARZschen Konstanten (12·4) ohne weiteres berechnen. Nach den gemachten Voraussetzungen dürfen die Reihen ausmultipliziert und gliedweise integriert werden; es folgt wegen (5·33):

$$a_k = \int_a^b F_k N[F_0]\,dx = \int_a^b \sum_{i=r}^{\infty} c_i \frac{y_i(x)}{(\lambda_i)^k} \sum_{j=r}^{\infty} c_j N[y_j]\,dx = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}. \tag{14·18}$$

---

[1]) Diese Voraussetzung ist für die speziellen Eigenwertaufgaben stets erfüllt.

Für die SCHWARZschen Quotienten (12·8) hat man damit

$$(14\cdot19)\qquad \mu_{k+1} = \frac{c_k}{a_{k+1}} = \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\frac{c_i^2}{\lambda_i^k}}{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\frac{c_i^2}{\lambda_i^{k+1}}} = \lambda_r \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty} c_i^2\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)^k}{\sum\limits_{i=r}^{\infty} c_i^2\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da die λ_i sämtlich positiv und die in den Summen auftretenden $\lambda_i \geq \lambda_r$ sind, kann man die monotone Abnahme der μ_k und ihre Beschränktheit gemäß (12·11), hier also die Tatsache

$$(14\cdot20)\qquad \mu_k \geq \mu_{k+1} \geq \mu_{k+2} \geq \cdots \geq \lambda_r$$

aus den folgenden Beziehungen unmittelbar ablesen:

$$(14\cdot21)\qquad \mu_k - \lambda_r = \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)\frac{c_i^2}{\lambda_i^{k-1}}}{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\frac{c_i^2}{\lambda_i^k}} \geq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

$$(14\cdot22)\qquad \mu_k - \mu_{k+1} = \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\sum\limits_{j>i}\frac{c_i^2}{\lambda_i^{k+1}}\frac{c_j^2}{\lambda_j^{k+1}}(\lambda_j - \lambda_i)^2}{\left(\sum\limits_{i=r}^{\infty}\frac{c_i}{\lambda_i^k}\right)\left(\sum\limits_{j=r}^{\infty}\frac{c_j^2}{\lambda_j^{k+1}}\right)} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Aus (14·19) folgt ferner die Konvergenz der μ_k gegen den Eigenwert λ_r (auch wenn λ_r ein mehrfacher Eigenwert ist) und aus (14·17) die Konvergenz der mit geeigneten Faktoren (z. B. mit λ_r^k) multiplizierten Funktionen $F_k(x)$ gegen die r-te Eigenfunktion $y_r(x)$ für $k \to \infty$ (bzw. wenn λ_r ein mehrfacher Eigenwert, etwa $\lambda_r = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{r+p} < \lambda_{r+p+1}$, ist, gegen $\sum\limits_{i=r}^{r+p} c_i y_i(x)$).

Aus (14·21) folgt ferner

$$\frac{\mu_k - \lambda_r}{\mu_{k+1} - \lambda_r} = \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)\frac{c_i^2}{\lambda_i^{k-1}}}{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\frac{c_i^2}{\lambda_i^k}} \cdot \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\frac{c_i^2}{\lambda_i^{k+1}}}{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)\frac{c_i^2}{\lambda_i^k}}$$

und

$$(14\cdot23)\qquad \frac{\mu_k - \lambda_r}{\mu_{k+1} - \lambda_r}\,\mu_{k+1} = \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)\frac{c_i^2}{\lambda_i^{k-1}}}{\sum\limits_{i=r}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)\frac{c_i^2}{\lambda_i^k}}.$$

In den Summen fallen die Glieder mit $i = r$ fort; man verkleinert daher den Wert des Quotienten, wenn man im Nenner λ_i^k durch $l_{r+1} \cdot \lambda_i^{k-1}$ ersetzt,

wobei l_{r+1} gleich λ_{r+1} oder eine untere Schranke für λ_{r+1} ist. Dann kann man l_{r+1} herausziehen und Zähler und Nenner werden gleich; man erhält

(14·24) $$\frac{\mu_k - \lambda_r}{\mu_{k+1} - \lambda_r} \mu_{k+1} \geq l_{r+1} .$$

Die untere Schranke l_{r+1} muß für den Übergang zu der folgenden Formel (14·25) so gewählt sein, daß $l_{r+1} > \mu_{k+1}$ ausfällt. (Ist $\lambda_{r+1} > \lambda_r$, so ist wegen der Konvergenz der μ_k gegen λ_r bei genügend großem k jedenfalls $l_{r+1} > \mu_{k+1}$ erreichbar.) Dann ergibt sich aus (14·24)

$$\left(\frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_{k+1} - \lambda_r} + 1\right) \mu_{k+1} \geq l_{r+1}$$

oder

(14·25) $$\mu_{k+1} - \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\frac{l_{r+1}}{\mu_{k+1}} - 1} \leq \lambda_r \leq \mu_{k+1} ,$$

also für den Fall, daß λ_r der erste Eigenwert λ_1 ist, in Übereinstimmung mit (12·19)[1]).

14·4. Konvergenz des Iterationsverfahrens bei Randwertproblemen. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel. Das Randwertproblem

$$y'' = a^2(1 - y),$$
$$y(-1) = y(1) = 0$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $y(x) = 1 - \frac{\cos a x}{\cos a}$; sie existiert, wenn $\cos a \neq 0$ ist, d. h. wenn a verschieden ist von den Zahlen $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$

Zur Lösung dieses Randwertproblems kann man das folgende Iterationsverfahren anwenden: man bestimmt ausgehend von einer willkürlich gewählten stetigen Funktion $Y_0(x)$ eine Funktionenfolge $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... als Lösungen der Randwertaufgaben

$$\left.\begin{aligned} Y''_{n+1} &= a^2(1 - Y_n) \\ Y_{n+1}(-1) &= Y_{n+1}(1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Zur Untersuchung der Konvergenz dieses Iterationsverfahrens werden die Abweichungen der $Y_n(x)$ von der exakten Lösung eingeführt:

$$z_n(x) = Y_n(x) - y(x) .$$

Dann genügen die $z_n(x)$ den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} z''_{n+1}(x) &= -a^2 z_n(x) \\ z_{n+1}(-1) &= z_{n+1}(1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

[1]) Weitere Abschätzungsformeln siehe in Math. Z. 46 (1940) 698—702.

$z_1(x)$ ist zweimal stetig differenzierbar, genügt den Randbedingungen und läßt sich daher in eine FOURIER-Reihe entwickeln:

$$z_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \sin \frac{\nu\pi(x+1)}{2}.$$

Dann ist

$$z_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4a^2}{\nu^2\pi^2} C_\nu \sin \frac{\nu\pi(x+1)}{2}.$$

Denn durch gliedweise (hier erlaubte) Differentiation erkennt man $z_2'' = -a^2 z_1$, und $z_2(x)$ erfüllt die Randbedingungen. Genau so folgt

$$z_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{4a^2}{\nu^2\pi^2}\right)^n C_\nu \sin \frac{\nu\pi(x+1)}{2},$$

d. h. für $|a| < \frac{\pi}{2}$ geht z_{n+1} gegen 0; das Iterationsverfahren konvergiert. Für $|a| > \frac{\pi}{2}$ wächst $z_{n+1}(x)$ über alle Grenzen, falls $C_1 \neq 0$ ist; das Iterationsverfahren divergiert dann im allgemeinen.

Nun sei

(14·26) $$\begin{cases} M[y] - aN[y] = r(x), \\ U_\mu[y] = 0 \end{cases}$$

ein selbstadjungiertes Randwertproblem, für welches das zugehörige homogene Eigenwertproblem

(14·27) $$M[y] - \lambda N[y] = 0, \quad U_\mu[y] = 0$$

die beim Entwicklungssatz in 10·8 geforderten Voraussetzungen erfüllt. Beim Iterationsverfahren berechnet man ausgehend von einer beliebig gewählten stetigen Funktion $Y_0(x)$ weitere $Y_n(x)$ nach

(14·28) $$M[Y_{n+1}] = aN[Y_n] + r(x), \quad U_\mu[Y_{n+1}] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wieder führt man zur Konvergenzuntersuchung die Unterschiede $z_n(x)$ gegenüber der Lösung $y(x)$ des Randwertproblems ein:

$$z_n(x) = Y_n(x) - y(x).$$

Dann gilt

$$M[z_{n+1}] = aN[z_n], \quad U_\mu[z_{n+1}] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nach den getroffenen Voraussetzungen läßt sich $z_1(x)$ nach den Eigenfunktionen $y_i(x)$ von (14·27) entwickeln:

$$z_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i(x)$$

Dann löst

$$z_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{\lambda_i} c_i y_i(x)$$

das Randwertproblem

$$M[z_2] = a N[z_1], \qquad U_\mu[z_2] = 0,$$

und allgemein gilt

$$z_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda_i}\right)^n c_i y_i(x). \tag{14·29}$$

Das Iterationsverfahren konvergiert also bei beliebigen c_i, wenn der Betrag von a kleiner als der kleinste Eigenwert ist: $|a| < \lambda_1$; bei $|a| > \lambda_1$ divergiert das Iterationsverfahren für $c_1 \neq 0$, d. h. im allgemeinen.

14·5. Methode von Koch für die höheren Eigenwerte[1]. Die Anwendung des Entwicklungssatzes auf das Verfahren der schrittweisen Näherungen in 14·3 hatte gezeigt: Ist die Ausgangsfunktion $F_0(x)$ im verallgemeinerten Sinne orthogonal zu den $(r-1)$ ersten Eigenfunktionen, aber nicht zur r-ten Eigenfunktion, so konvergieren die Schwarzschen Quotienten μ_k gegen den r-ten Eigenwert λ_r. Ist also insbesondere $F_0(x)$ zur ersten Eigenfunktion $y_1(x)$ im verallgemeinerten Sinne orthogonal, so konvergieren die μ_k im allgemeinen gegen den zweiten Eigenwert λ_2. Man kann daher den zweiten Eigenwert λ_2 angenähert bestimmen, indem man von einer Funktion $H_0(x)$ ausgeht, die zu dem letzten $F_n(x)$, welches man zur Berechnung des ersten Eigenwertes bestimmt hatte und welches also die beste Annäherung ist, die man für $y_1(x)$ hat, im verallgemeinerten Sinne orthogonal ist. Da aber $F_n(x)$ nicht genau mit $y_1(x)$ übereinstimmt, wird $H_0(x)$ immer noch eine kleine Komponente zur ersten Eigenfunktion haben, und man zieht vorsichtshalber bei jedem Iterationsschritt die Komponente zur Funktion $F_n(x)$ ab, die als beste Näherung für die erste Eigenfunktion dient, berechnet also nach der Vorschrift

$$\left.\begin{aligned} &M[H_k^*] = N[H_{k-1}]; \quad U_\mu[H_k^*] = 0 \\ &H_k(x) = H_k^*(x) - \frac{F_n(x)}{\int_a^b F_n N[F_n]\,dx} \cdot \int_a^b H_k^*(\xi) N[F_n(\xi)]\,d\xi \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, \ldots) \tag{14·30}$$

weitere H_k und erhält Näherungswerte für λ_2 nach

$$\lambda_2 \approx R[H_k] = \frac{\int_a^b H_k M[H_k]\,dx}{\int_a^b H_k N[H_k]\,dx}. \tag{14·31}$$

Entsprechend kann man auch den dritten Eigenwert angenähert bestim-

[1] J. J. Koch, Verhandl. 2. internat. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich 1926, S. 213—218.

men, man hat dann nur jeweils die Komponenten zur ersten und zweiten Eigenfunktion abzuziehen[1]).

14·6. Vermischte Übungsaufgaben zum vierten Kapitel. 1. Entsprechend zu dem Beispiel in 12·2 führe man das Verfahren der schrittweisen Näherungen für das Eigenwertproblem

$$-y'' = \lambda y; \quad y'(0) = y(1) + y'(1) = 0$$

durch, ausgehend von der Funktion $F_0(x) = 1$ (es hat sich hier nur die erste Randbedingung gegenüber 12·2 geändert).

Ergebnis: Nach (12·1) erhält man

$$2! \cdot F_1 = 3 - x^2,$$
$$4! \cdot F_2 = 49 - 18\,x^2 + x^4,$$
$$6! \cdot F_3 = 1987 - 735\,x^2 + 45\,x^4 - x^6\,.$$

Nach (12·4) und (12·8) ergeben sich für die a_k und μ_k die Werte:

k	a_k	μ_k	$\mu_{k-1} - \mu_k$	$\frac{\mu_{k-2} - \mu_{k-1}}{\mu_{k-1} - \mu_k}\,\mu_k$
0	1	—	—	—
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	—	—
2	$\frac{9}{5}$	$\frac{20}{27} = 0{,}740741$	0,009259	—
3	$\frac{766}{315}$	$\frac{567}{766} = 0{,}7402089$	0,0005319	12,89
4	$\frac{9314}{2835}$	$\frac{3447}{4657} = 0{,}74017608$	0,00003280	12,00
5	$\frac{230698}{51975}$	$\frac{256135}{346047} = 0{,}740174023$	0,000002056	11,80

Die ersten beiden Eigenwerte lauten daher

$$\lambda_1 = 0{,}740174, \quad \lambda_2 \approx 11{,}8\,.$$

Die Eigenwerte sind mit $\lambda = k^2$ nach Tafel VI (S. 145) exakt gegeben durch die Nullstellen der Gleichung

$$k \cdot \operatorname{tg} k = 1\,.$$

Für λ_2 ergibt sich der Wert 11,73.

2. Man schließe die Knicklast P für den bereits in Aufgabe 3 von 11·4 behandelten Druckstab (Abb. 11·4, S. 174) in Schranken ein. Das zugehörige Eigenwertproblem lautete

$$[(3 - x^2)y'']'' + 60\,y = -\lambda y''; \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0\,.$$

[1]) Eine andere Methode zur angenäherten Bestimmung der höheren Eigenwerte findet sich bei A. TRAENKLE, Ing.-Archiv 1 (1930) 499—526, speziell „Methode II", S. 510ff.

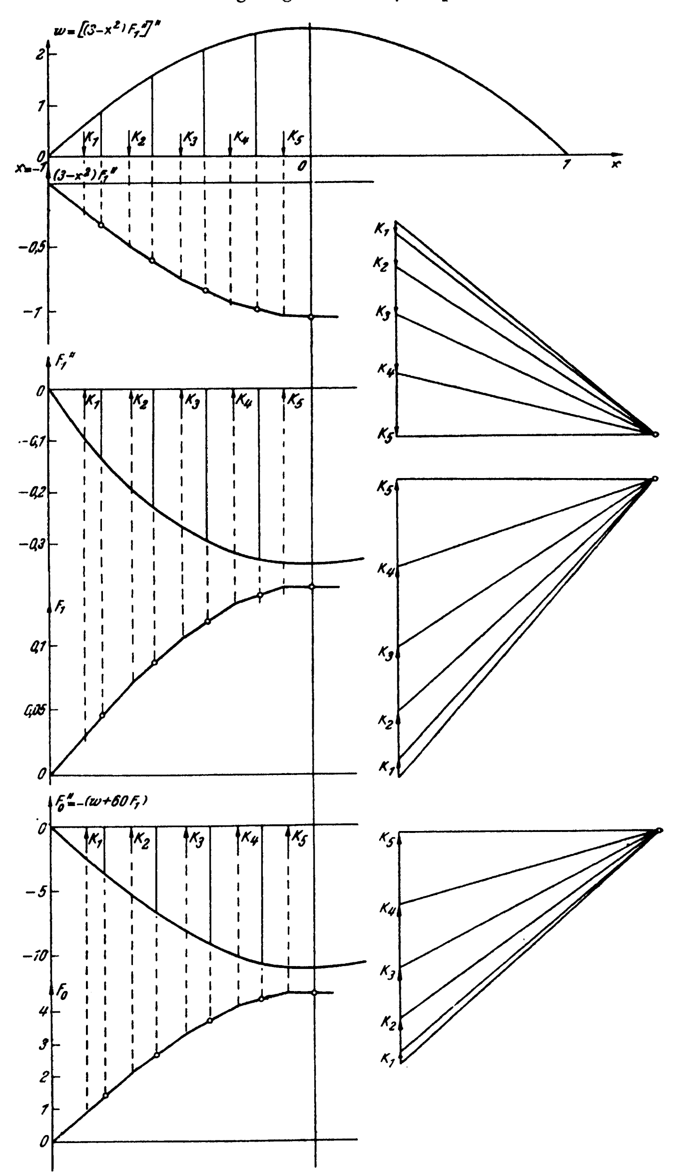


Abb. 14·1. Graphische Lösung für $(a\,y'')'' + c\,y = -\lambda\,y''$; $y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$.

Lösung: Zwei Vergleichsfunktionen F_0, F_1, die miteinander in der geforderten Beziehung (12·1) stehen, waren bereits in (11·27) angegeben. Mit ihnen berechnet man nach (12·4) und (12·8)

$$a_0 = 3761275; \quad a_1 = 119950,9; \quad a_2 = 3825,593$$

und daraus

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 31,35679; \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 31,35485 .$$

Eine untere Schranke l_2 für den zweiten Eigenwert λ_2 (bei Betrachtung nur der zu $x = 0$ symmetrischen Eigenfunktionen) erhält man durch Vergleich mit einem Problem mit konstanten Koeffizienten, bei dem man $3 - x^2$ durch seinen kleinsten Wert 2 ersetzt hat, zu

$$l_2 = 60\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 = 47,11 .$$

Dann liefert (12·19) die gegenüber 11·4 engeren Schranken

$$31,35096 \leqq \lambda_1 \leqq 31,35485 .$$

3. Man führe Aufgabe 2 graphisch nach den Methoden des § 13 durch.

Man geht aus von einer geschätzten Funktion $w(x) = [(3 - x^2)F_1'']''$, die in Abb. 14·1 oben dargestellt ist; man weiß von w nur, daß es an den Endpunkten $x = \pm 1$ verschwindet, im übrigen nimmt man es symmetrisch an, und bei den weiteren Schritten kann man sich daher stets mit der linken Hälfte $x \leqq 0$ begnügen. Ein erstes Seileck liefert $(3 - x^2)F_1''$, durch Division durch $3 - x^2$ erhält man F_1'', welches mit Hilfe eines zweiten Seileckes zu F_1 führt. Nun berechnet man sich die Funktion $-F_0'' = w + 60\,F_1$ und gewinnt $F_0(x)$ durch ein drittes Seileck. Die Maßstäbe für F_1'', F_1, F_0 sind nach (13·17) ohne weiteres berechenbar; in Abb. 14·1 sind Skalen angebracht. Die Integrale für die Schwarzschen Konstanten werden nach der Simpsonschen Regel ausgewertet:

$$a_0 = 71,5; \quad a_1 = 2,28; \quad a_2 = 0,073;$$

Die Schwarzschen Quotienten $\mu_1 = \frac{a_0}{a_1}$, $\mu_2 = \frac{a_1}{a_2}$ unterscheiden sich innerhalb der durch die Zeichnung bedingten Genauigkeit nicht voneinander und haben einen Wert von etwa 31,3.

4. Man berechne nach (12·19) die Knicklast für einen beiderseits gelenkig gelagerten Stab der Länge $l = \pi$ und der veränderlichen Biegesteifigkeit

$$\alpha = \frac{c}{2 + \cos x} \quad \text{(Abb. 14·2).}$$

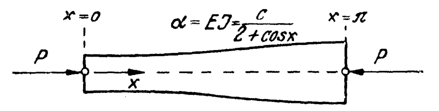


Abb. 14·2. Knickstab zu Aufgabe 4 von 14·6.

Mit $P = \lambda c$ hat man

$$-y'' = \lambda\,(2 + \cos x)y = \lambda g_0 y ,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0 .$$

Lösung: Zwei den Randbedingungen genügende Funktionen F_0, F_1 mit $-F'' = g_0 F_0$ erhält man leicht in

$$F_1 = c\sin x + \sin 2x, \quad F_0 = \frac{c\sin x + 4\sin 2x}{2 + \cos x} .$$

Die Konstante c kann beliebig gewählt werden. Um aber gute Resultate zu erhalten, verlangen wir, daß F_0 und F_1, die ja beide Näherungen für die erste Eigenfunktion sein sollen, in ihrer Gestalt einander möglichst ähnlich sind. Die Gestalt von $F_0(x)$ kann man ganz grob durch den Wert an der Mitte $F_0\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und die Werte der Tangenten an den Enden $F_0'(0)$ und $F_0'(\pi)$ beschreiben. Verlangt man ähnliche Gestalt bei F_1, so ergibt die Forderung

$$F_0'(0) : F_1'(0) = F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) : F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{den Wert } c = 10$$

und die Forderung

$$F_0'(\pi) : F_1'(\pi) = F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) : F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{den Wert } c = 14 .$$

Man kann also keine allzu scharfe Übereinstimmung von F_0 mit F_1 erreichen und wird zur Erzielung möglichst guter Übereinstimmung etwa $c = 12$ setzen. Man erhält mit $c = 12$ nach (12·4) und (12·8)

$$a_0 = \int_0^\pi g_0 F_0^2\, dx = 16\pi(4 - \sqrt{3}); \qquad a_1 = \int_0^\pi g_0 F_0 F_1\, dx = 74\pi;$$

$$a_2 = \int_0^\pi g_0 F_1^2\, dx = 151\pi; \qquad \mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{8(4-\sqrt{3})}{37} = 0{,}4903674;$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{74}{151} = 0{,}4900662 .$$

Eine untere Schranke l_2 für λ_2 erhält man, indem man $g_0(x)$ durch seinen Maximalwert 3 ersetzt und so ein geschlossen lösbares Problem bekommt:

$$l_n = \frac{n^2}{3}, \quad \text{also} \quad l_2 = \frac{4}{3},$$

und damit nach (12·19) $0{,}489891 \leq \lambda_1 \leq 0{,}490066$.

Zu diesem Beispiel vgl. auch Aufgabe 1 von 21·6.

5. Man berechne für den in Aufgabe 5 von 11·4 (S. 175) behandelten Druckstab:

$$y^{\mathrm{IV}} + 20y = -\lambda y'',$$
$$y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

die ersten beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2.

Ergebnis: Wie in 11·4 verwendet man für λ_1 die Ausgangsfunktion

$$F_1(x) = 61 - 75x^2 + 15x^4 - x^6 .$$

Dann wird $F_0(x) = 644\frac{9}{14} - 790x^2 + 155x^4 - 10x^6 + \frac{5}{14}x^8$.

$$a_0 = -\int_{-1}^{1} F_0 F_0''\, dx = 1027294; \quad a_1 = -\int_{-1}^{1} F_0 F_1'' = 97160{,}652;$$

$$a_2 = -\int_{-1}^{1} F_1 F_1''\, dx = 9189{,}4026;$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 10{,}573148; \quad \mu_2 = 10{,}573120 \text{ (Fehler } + 0{,}00024\,\%\text{)}\ [1].$$

---

[1] Das Vorzeichen des Fehlers (vgl. G. SCHULZ, Formelsammlung zur praktischen Mathematik, Sammlung Göschen, Berlin und Leipzig 1937, S. 13) ist nach S. 117 folgendermaßen festgelegt: Eine Näherung ξ für eine Größe, deren wahrer Wert x ist, hat den Fehler $\xi - x$.

Für den zweiten Eigenwert λ_2 geht man aus von einer Funktion $F_1(x)$, die außer $F_1(\pm 1) = F_1''(\pm 1) = F_1^{IV}(\pm 1) = 0$ noch $F_1(0) = 0$ erfüllt:

$$F_1(x) = 31x - 49x^3 + 21x^5 - 3x^7,$$

$$F_0(x) = \frac{5}{6}(430x - 628x^3 + 210x^5 - 12x^7 + x^9),$$

$$a_0 = -\int_{-1}^{1} F_0 F_0'' \, dx = 141082{,}65; \quad a_1 = 11779{,}580; \quad a_2 = 989{,}62786;$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 11{,}97688; \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 11{,}90304 \text{ (Fehler } + 0{,}06\,\%).$$

Die exakten Eigenwerte sind gegeben durch

$$\lambda_n = \frac{20 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lambda_1 = 10{,}573096, \quad \lambda_2 = 11{,}896028, \quad \lambda_3 = 23{,}10724, \ldots$$

6. Man berechne einige Funktionen $F_n(x)$ bei dem Problem

$$y^{IV} = -\lambda y'', \quad y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0.$$

Ausgehend von $F_0(x) = 1 - x^2$ erhält man:

$$12 \cdot F_1(x) = (1 - x^2)^2,$$

$$360 F_2(x) = (1 - x^2)^2 (3 - x^2),$$

$$60480 F_3(x) = (1 - x^2)^2 (51 - 22x^2 + 3x^4).$$

$$a_0 = \frac{8}{3}; \quad a_1 = \frac{8}{45}; \quad a_2 = \frac{16}{945}; \quad a_3 = \frac{8}{7 \cdot 675}; \quad a_4 = \frac{16}{231 \cdot 405},$$

$$\mu_1 = 15; \quad \mu_2 = 10{,}5; \quad \mu_3 = 10; \quad \mu_4 = 9{,}9 \left(= \frac{99}{10}\right); \quad \lambda_1 = \pi^2 = 9{,}8696.$$

7. Man berechne obere Schranken μ_1, μ_2 für den kleinsten Eigenwert λ_1 des Problems

$$y^{IV} + A[(1 - x)y']' = \lambda y,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$$

für $A = 2$, indem man nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen für $F_0(x)$ und $F_1(x)$ Polynome möglichst niedrigen Grades ansetzt, derart, daß $F_0(x)$ die wesentlichen und $F_1(x)$ alle Randbedingungen erfüllt.

Durchführung: Mit

$$F_0 = 6x^2 + 28x^3 - 15x^4,$$

$$F_1 = \frac{1}{10}(30x^2 - 10x^3 - 5x^4 + 3x^5)$$

(ist A von 2 oder 6 verschieden, so muß man bei F_0 und F_1 Polynome mit einem um 1 höheren Grade verwenden) ergeben sich die SCHWARZschen Konstanten und Quotienten

$$a_0 = \frac{2432}{35} = 69{,}4857, \quad a_1 = \frac{778}{105} = 7{,}40935, \quad a_2 = \frac{55688}{69300} = 0{,}803579,$$

$$\mu_1 = \frac{3648}{389} = 9{,}37789, \quad \mu_2 = \frac{64185}{6961} = 9{,}22066.$$

5. Kapitel.

Numerische Verwertung der Minimaleigenschaften.

§ 15. Grundlagen des RITZschen Verfahrens.

15·1. Drei Minimalprinzipien. Vorgelegt sei eine selbstadjungierte Eigenwertaufgabe (4·5) bis (4·8), bei der der Eigenwert λ nicht in den Randbedingungen auftritt. Die Bedingungen (8·2) der Volldefinitheit

$$\int_a^b u M[u]\,dx > 0\,, \qquad \int_a^b u N[u]\,dx > 0$$

seien für alle Vergleichsfunktionen u erfüllt. Dann gelten folgende Minimalprinzipien.

1. Minimalprinzip von RAYLEIGH: Nach dem Satz in 8·1 ist der kleinste Eigenwert λ_1 das Minimum, das der RAYLEIGHsche Quotient (8·1)

$$R[u] = \frac{\int_a^b u M[u]\,dx}{\int_a^b u N[u]\,dx} \tag{15·1}$$

annimmt, wenn u den Bereich aller Vergleichsfunktionen durchläuft.

2. Minimalprinzip von KAMKE: Man kann gegenüber dem RAYLEIGHschen Minimalprinzip den Bereich der Funktionen u erweitern, was für die praktische Rechnung oft von großem Vorteil ist. Da jedoch die Beweise ziemlich lang sind, kann hier nur das Ergebnis mitgeteilt werden, bezüglich der Beweise muß auf die Originalarbeit von KAMKE[1]) verwiesen werden.

Wendet man nach 4·6 die DIRICHLETsche Formel (4·17) (4·18) auf den RAYLEIGHschen Quotienten (15·1) an, so geht $R[u]$ über in

$$K[u] = \frac{\int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu [u^{(\nu)}]^2\,dx + M_0[u]}{\int_a^b \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu [u^{(\nu)}]^2\,dx + N_0[u]} \tag{15·2}$$

Dabei kann man wegen der vorausgesetzten Selbstadjungiertheit in den DIRICHLETschen Randteilen $M_0[u]$ und $N_0[u]$ mit Hilfe der Randbedingungen $U_\mu[u] = 0$ die m-ten und alle höheren Ableitungen von u eliminieren, so daß in (15·2) nur u und die Ableitungen von u bis zur m-ten Ord-

[1]) E. KAMKE, Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben IV, Math. Z. 48 (1942) 67—100.

nung vorkommen. In Tafel III (S. 66) sind für eine Anzahl der wichtigsten Problemklassen diese Ausdrücke $M_0[u]$ und $N_0[u]$ explizit angegeben.

Der Satz von KAMKE sagt dann aus, daß λ_1 das Minimum des Quotienten $K[u]$ ist, wenn u den Bereich der zulässigen Funktionen durchläuft, also der Funktionen, die nach der Definition in 4·2 nur m-mal stetig differenzierbar zu sein und nur die wesentlichen Randbedingungen zu erfüllen brauchen.

3. Minimalprinzip bei den speziellen Eigenwertaufgaben[1]). Im Falle $N[y] = g_0(x)\,y$ ergibt sich ein weiteres Prinzip aus dem Verfahren der schrittweisen Näherungen. Ist $u(x)$ eine beliebige Vergleichsfunktion, so kann man sie als Funktion $F_1(x)$ beim Iterationsverfahren auffassen und zu ihr eine Funktion

$$F_0(x) = \frac{1}{g_0(x)} M[F_1] \tag{15·3}$$

bilden. Der RAYLEIGHsche Quotient (15·1) läßt sich dann als SCHWARZscher Quotient μ_2 (nach 12·9)

$$R[u] = R[F_1] = \mu_2$$

schreiben. Da aber nach (12·11) die μ_k monoton abnehmen, ist auch $\mu_1 \geqq \lambda_1$. Nun läßt sich μ_1 leicht durch F_1 ausdrücken, es ist

$$\mu_1 = \frac{\int\limits_a^b F_0 N[F_0]\,dx}{\int\limits_a^b F_1 N[F_0]\,dx} = \frac{\int\limits_a^b F_0 M[F_1]\,dx}{\int\limits_a^b F_1 M[F_1]\,dx}, \tag{15·4}$$

also nach (15·3), wenn wir statt F_1 wieder u schreiben,

$$\mu_1 = \frac{\int\limits_a^b \frac{1}{g_0(x)} (M[u])^2\,dx}{\int\limits_a^b u\,M[u]\,dx}. \tag{15·5}$$

Das Minimum dieses Quotienten μ_1, wenn u den Bereich aller Vergleichsfunktionen durchläuft, ist der kleinste Eigenwert λ_1. Im allgemeinen ist $R[u]$ eine bessere Annäherung als μ_1 bei derselben Funktion u, jedoch ist μ_1 oft etwas schneller zu ermitteln, vgl. hierzu 13·7 und 16·10.

Beispiel: Die drei genannten Minimalprinzipien stellen wir einander gegenüber an dem Beispiel

$$-y'' = \lambda y; \quad y(0) = 0; \quad y'(1) + C\,y(1) = 0 \quad \text{mit} \quad C > 0.$$

[1]) L. COLLATZ, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) 228.

Nach dem RAYLEIGHschen Prinzip (15·1) ist

$$\lambda_1 = \text{Min} \frac{-\int\limits_0^1 u\,u''\,dx}{\int\limits_0^1 u^2\,dx},$$

wobei u den Bereich der Vergleichsfunktionen, also aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit $u(0) = u'(1) + C u(1) = 0$ durchläuft. Nach dem KAMKEschen Prinzip (15·2) ist wegen (4·19)

$$\lambda_1 = \text{Min} \frac{\int\limits_0^1 u'^2\,dx + C[u(1)]^2}{\int\limits_0^1 u^2\,dx},$$

wobei u den Bereich der zulässigen Funktionen, also aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit $u(0) = 0$ (es brauchen nur die wesentlichen Randbedingungen erfüllt zu werden) durchläuft. Beim dritten Minimalprinzip (15·5)

$$\lambda_1 = \text{Min} \frac{\int\limits_0^1 [u'']^2\,dx}{-\int\limits_0^1 u\,u''\,dx}$$

durchläuft u wieder den Bereich der Vergleichsfunktionen.

Zahlenbeispiel für den RAYLEIGHschen Quotienten: Das Problem

$$-y'' = \lambda y; \quad y'(0) = y(1) = 0$$

hat als erste Eigenlösung

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{2}x$$

mit dem Eigenwert

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2{,}4674\cdots$$

Als Annäherungsfunktion, die die Randbedingungen erfüllt, nehmen wir z. B. ein Polynom, und zwar von niedrigstem Grade, bei dem die Randbedingungen erfüllbar sind:

$$u = 1 - x^2.$$

Dann wird nach (15·1)

$$R[u] = \frac{\int\limits_0^1 2(1-x^2)\,dx}{\int\limits_0^1 (1-x^2)^2\,dx} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{2} = 2{,}5 > \lambda_1 = 2{,}4674.$$

Schon mit dieser ganz einfachen Annäherungsfunktion hat man also einen nur um $1\frac{1}{2}\%$ zu hohen Wert für λ_1 erhalten.

15·2. Das allgemeine Ritzsche Verfahren. Es liegt nun nahe, eine Funktion u noch von Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_p$ abhängen zu lassen:

$$u = u(x; a_1, a_2, \ldots, a_p),$$

und diese so zu variieren, daß der mit diesem u gebildete Minimalausdruck, z. B. der RAYLEIGHsche Quotient

$$R[u] = R[u(x; a_1, a_2, \ldots, a_p)]$$

einen möglichst kleinen Wert erhält. Es steht zu vermuten, daß dann dieser Kleinstwert von R mit dem Eigenwert λ_1 gut übereinstimmen wird (WALTER RITZ, 1908)[1]).

Die Forderung, R als Funktion von $a_1, a_2, \ldots, a_p$ zum Minimum zu machen, verlangt als notwendige Bedingung die Gleichungen

$$(15\cdot6) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial R}{\partial a_p} = 0.$$

Das sind p Gleichungen zur Bestimmung der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Genau so kann man auch bei den anderen beiden in 15·1 genannten Minimalausdrücken $K[u]$ und $\mu_1[u]$ die Funktion u von Parametern $a_1, \ldots, a_p$ abhängen lassen und erhält entsprechende Gleichungen wie (15·6).

Wir gehen jetzt nacheinander noch etwas ausführlicher auf die drei in 15·1 aufgestellten Minimalprinzipien ein.

15·3. Die Galerkinschen Gleichungen. Man kommt zu bequemen Gleichungen, wenn man u nicht in beliebiger (nichtlinearer) Weise von den Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_p$ abhängen läßt, sondern einen linearen Ansatz benutzt:

$$(15\cdot7) \qquad u = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + \cdots + a_p v_p(x).$$

Dabei sollen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ fest gewählte, voneinander linear unabhängige Vergleichsfunktionen sein, also $u \equiv 0$ nur dann, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ ist. Dieser Fall wird ausgeschlossen. Dann ist auch u eine Vergleichs-

[1]) WALTER RITZ, deutscher theoretischer Physiker, geboren als Sohn eines Kunstmalers am 22. Februar 1878 in Sitten im Wallis (Schweiz), studierte 1899 bis 1902 in Zürich und Göttingen, wo er promovierte, 1908 Privatdozent wurde und am 7. Juli 1909 starb. Vor die Wahl gestellt, entweder wissenschaftlich zu arbeiten oder für die Wiederherstellung seiner Gesundheit zu leben, hatte er sich bewußt für das erste entschieden (vgl. den Nachruf von PIERRE WEISS in W. RITZ, Gesammelte Werke, Paris 1911). Seine hier zu nennenden grundlegenden Arbeiten sind: Habilitationsschrift über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. f. reine u. angew. Math. 135 (1908), Heft 1, und Ann. Physik 28 (1909) 737.

funktion. Beim Einsetzen von u in den ersten der drei in 15·1 genannten Minimalausdrücke, in (15·1), erhält man[1]):

$$R[u] = \frac{\int_a^b \sum_{r=1}^p a_r v_r(x) \cdot \sum_{s=1}^p a_s M[v_s(x)]\, dx}{\int_a^b \sum_{r=1}^p a_r v_r(x) \cdot \sum_{s=1}^p a_s N[v_s(x)]\, dx}. \tag{15·8}$$

Zur Abkürzung führen wir die Größen m_{rs} und n_{rs} ein,

$$\begin{cases} m_{rs} = \int_a^b v_r(x) M[v_s(x)]\, dx, \\ n_{rs} = \int_a^b v_r(x) N[v_s(x)]\, dx; \end{cases} \tag{15·9}$$

man kann sie auch als Elemente zweier quadratischer Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auffassen:

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{11} \cdots m_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_{p1} \cdots m_{pp} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} n_{11} \cdots n_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ n_{p1} \cdots n_{pp} \end{pmatrix}.$$

Wegen der vorausgesetzten Selbstadjungiertheit sind diese beiden Matrizen symmetrisch:

$$m_{rs} = m_{sr}, \quad n_{rs} = n_{sr}. \tag{15·10}$$

Dann hat R die Gestalt eines Quotienten zweier quadratischer Formen Z und N (Zähler und Nenner): $R[u] = \frac{Z}{N}$ mit

$$Z = \sum_{r,s=1}^p m_{rs} a_r a_s; \quad N = \sum_{r,s=1}^p n_{rs} a_r a_s. \tag{15·11}$$

Zähler und Nenner können nach der Voraussetzung (8·2) nur positive Werte annehmen (der Fall $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ ist ausgeschlossen), es sind also Z und N positiv definite quadratische Formen. Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum von R lauten dann:

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = \frac{N \frac{\partial Z}{\partial a_r} - Z \frac{\partial N}{\partial a_r}}{N^2} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, p).$$

Das Minimum von R werde mit Λ bezeichnet, man verwendet es als Näherungswert für den ersten Eigenwert λ_1:

$$\Lambda = \operatorname{Min} R[u(x; a_1 \cdots a_p)]. \tag{15·12}$$

---

[1]) Für die praktische Durchführung des Verfahrens ist es oft besser, sich nicht die Funktionen $v_r(x)$ vorzugeben und aus ihnen $M[v_r]$ zu bilden, sondern sich Funktionen $M[v_r]$ zu wählen und aus diesen durch Integration die v_r herzustellen. Bei graphischer Durchführung des Verfahrens wird diese umgekehrte Vorgehensart geradezu notwendig, vgl. 16·9 und 16·10.

Nach dem RAYLEIGHschen Prinzip (15.1) ist $\Lambda \geqq \lambda_1$. Dieses Λ ist zugleich der Wert von $\frac{Z}{N}$ an der Minimumstelle. Die Gleichungen für die a_p vereinfachen sich daher zu:

(15·13) $$\frac{\partial Z}{\partial a_r} - \Lambda \frac{\partial N}{\partial a_r} = 0\,.$$

Nun war Z nach (15.11) die Abkürzung für

$$Z = \sum_{r,s=1}^{p} m_{rs} a_r a_s = m_{11} a_1^2 + 2 m_{12} a_1 a_2 + \cdots + m_{22} a_2^2 + \cdots.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial Z}{\partial a_r} = 2 \sum_{s=1}^{p} m_{rs} a_s\,, \qquad \frac{\partial N}{\partial a_r} = 2 \sum_{s=1}^{p} n_{rs} a_s$$

(15·13) ergibt daher

(15·14) $$\sum_{s=1}^{p} a_s (m_{rs} - \Lambda n_{rs}) = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Diese Gleichungen heißen *Gleichungen von* GALERKIN. Sie stellen p homogene, lineare Gleichungen für ebenso viele Größen a_s dar und haben genau dann eine nichttriviale (d. h. nicht identisch verschwindende) Lösung, wenn ihre Koeffizientendeterminante verschwindet:

(15·15) $$\det(m_{rs} - \Lambda n_{rs}) = \begin{vmatrix} m_{11} - \Lambda n_{11} & m_{12} - \Lambda n_{12} & \cdots & m_{1p} - \Lambda n_{1p} \\ m_{21} - \Lambda n_{21} & m_{22} - \Lambda n_{22} & \cdots & m_{2p} - \Lambda n_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{p1} - \Lambda n_{p1} & m_{p2} - \Lambda n_{p2} & \cdots & m_{pp} - \Lambda n_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

Das ist eine algebraische Gleichung für Λ vom p-ten Grade; sie hat p Wurzeln $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$; da beide Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ reell und symmetrisch sind und die zu $\mathfrak{N}$ gehörige quadratische Form N in (15·11) positiv definit ist, sind nach einem bekannten Satz der Algebra alle Wurzeln Λ_i reell[1]). Wir ordnen sie der Größe nach:

$$\Lambda_1 \leqq \Lambda_2 \leqq \cdots \leqq \Lambda_p$$

und sehen diese Zahlen $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$ als Näherungswerte für die ersten p Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ an. In 15·8 wird gezeigt, daß sie sämtlich obere Schranken für die Eigenwerte sind: $\Lambda_p \geqq \lambda_p$.

Man kann den Gleichungen (15·14) noch eine andere Deutung geben. Der Quotient $R = \frac{Z}{N}$ ist in den Größen a_r homogen vom nullten Grade, d. h. er ändert seinen Wert nicht, wenn man alle a_r mit derselben Konstanten $C (\neq 0)$ multipliziert. Man kann sich daher die a_r „normiert" denken und

[1]) Siehe z. B.: O. PERRON, Algebra, Berlin und Leipzig 1927, Bd. II, S. 14.

nur solche Systeme von p Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ betrachten, für die der Nenner N einen festen Wert, etwa den Wert 1 hat:

$$\sum_{r,s=1}^{p} n_{rs} a_r a_s = 1\,. \tag{15·16}$$

Dann ist $R = Z$, und man untersucht das Minimum der quadratischen Form Z unter der Nebenbedingung (15·16)[1]).

15·4. Zurückführung auf die Säkulargleichung. Sind die im Ansatz (15·7) verwendeten Funktionen $v_r(x)$ im verallgemeinerten Sinne orthogonal und normiert, d. h. bestehen die Gleichungen

$$n_{rs} = \int_a^b v_r N[v_s]\,dx = \begin{cases} 0 \text{ für } r \neq s, \\ 1 \text{ für } r = s, \end{cases} \tag{15·17}$$

so ist die Gleichung (15·15) für die Näherungswerte Λ_i die gewöhnliche Säkulargleichung:

$$\begin{vmatrix} m_{11} - \Lambda & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} - \Lambda & \cdots & m_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pp} - \Lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{15·18}$$

Dann sind die Λ_i die „charakteristischen Zahlen" der Matrix $\mathfrak{M}$, und zu ihrer schnellen Berechnung gibt es besondere Verfahren[2]).

Erfüllen jedoch die Ausgangsfunktionen v_r nicht die Gleichungen (15·17), so kann man durch eine lineare Transformation

$$\begin{cases} w_1 = c_{11} v_1 \\ w_2 = c_{21} v_1 + c_{22} v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_p = c_{p1} v_1 + c_{p2} v_2 + \cdots + c_{pp} v_p \end{cases} \tag{15·19}$$

zu einem neuen System von p Funktionen $w_1, w_2, \ldots, w_p$ übergehen, welches im verallgemeinerten Sinne orthogonal und normiert ist. Dieser Übergang von den v_r zu den w_r wird als „Orthogonalisierung" bezeichnet[3]).

---

1) Hieraus kann man die Existenz eines Minimums Λ folgern; nach einem Satz von WEIERSTRASS muß Z als stetige Funktion der $a_1, a_2, \ldots, a_p$ auf der abgeschlossenen beschränkten Menge, die durch (15·16) gegeben ist, das Minimum an mindestens einer Stelle annehmen.

2) U. WEGNER, Numerische Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, Berlin voraussichtlich 1944 oder 1945, L. COLLATZ, Math. Z. 48 (1942) 221, weitere Literatur bei A. VOGEL, Deutsche Mathematik 7 (1944) 523.

3) Die Orthogonalisierung wurde in 5·9 durch eine fertige Formel (5·32) vorgenommen, soll jedoch hier wegen ihrer Wichtigkeit nochmals, und zwar auf eine andere Weise durchgeführt werden.

Zunächst bestimmt man c_{11} aus

$$\int_a^b w_1 N[w_1]\,dx = 1, \quad \text{d.h. aus} \quad c_{11}^2 = \frac{1}{\int_a^b v_1 N[v_1]\,dx}.$$

Der Nenner ist nach Voraussetzung (8·2) von Null verschieden; das Vorzeichen von c_{11} ist frei wählbar, die Funktionen w_r sind nur bis auf das Vorzeichen festgelegt. Dann bestimmt man zwei Zahlen c_{21}^*, c_{22}^*, die nicht beide verschwinden, so daß die Funktion

$$w_2^* = c_{21}^* v_1 + c_{22}^* v_2$$

zu w_1 im verallgemeinerten Sinne orthogonal ist, d. h. es soll

$$c_{21}^* \int_a^b w_1 N[v_1]\,dx + c_{22}^* \int_a^b w_1 N[v_2]\,dx = 0$$

sein. Da v_1 und v_2 linear voneinander unabhängig sind, kann w_2^* nicht identisch verschwinden; man kann nun noch eine Konstante C_2 so bestimmen, daß $w_2 = C_2 w_2^*$ die Normierungsbedingung

$$\int_a^b w_2 N[w_2]\,dx = 1$$

erfüllt. Dann setzt man $c_{21} = C_2 c_{21}^*$ und $c_{22} = C_2 c_{22}^*$.

Nun bestimmt man drei Zahlen c_{31}^*, c_{32}^*, c_{33}^*, die nicht alle drei verschwinden, derart, daß die Funktion $w_3^* = c_{31}^* v_1 + c_{32}^* v_2 + c_{33}^* v_3$ zu w_1 und zu w_2 im verallgemeinerten Sinne orthogonal ist:

$$c_{31}^* \int_a^b w_1 N[v_1]\,dx + c_{32}^* \int_a^b w_1 N[v_2]\,dx + c_{33}^* \int_a^b w_1 N[v_3]\,dx = 0$$

$$c_{31}^* \int_a^b w_2 N[v_1]\,dx + c_{32}^* \int_a^b w_2 N[v_2]\,dx + c_{33}^* \int_a^b w_2 N[v_3]\,dx = 0.$$

Die Funktion w_3^* kann wieder wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen v_1, v_2, v_3 nicht identisch verschwinden, man kann sie also mit einem konstanten Faktor C_3 so multiplizieren, daß für die Funktion $w_3 = C_3 w_3^*$

$$\int_a^b w_3 N[w_3]\,dx = 1$$

gilt. So fortfahrend kann man

$$\text{(15·20)} \qquad \int_a^b w_r N[w_s]\,ds = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq s \\ 1 & \text{für } r = s \end{cases}$$

erreichen.

Die Funktionen $w_r(x)$ sind voneinander linear unabhängig, denn aus einer Beziehung

$$\sum_{r=1}^{p} \alpha_r w_r(x) = 0$$

würde durch Multiplikation mit $N[w_q]$ und Integration über das Intervall von a bis b folgen, daß $\alpha_q = 0$ für $q = 1, 2, \ldots, p$.

Man kann die v_r nach (15·19) durch die w_r ausdrücken:

$$(15{\cdot}21)\qquad \begin{cases} v_1 = \frac{1}{c_{11}} w_1 = d_{11} w_1 \\ v_2 = \qquad d_{21} w_1 + d_{22} w_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_p = \qquad d_{p1} w_1 + d_{p2} w_2 + \cdots + d_{pp} w_p , \end{cases}$$

d. h. es kann in der Transformation (15·19) keines der c_{ii} verschwinden; wäre nämlich einmal $c_{qq} = 0$, während $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0, \ldots, c_{q-1,q-1} \neq 0$ ist, so hätte man in der q-ten Gleichung von (15·19) eine lineare Beziehung zwischen den $w_1, w_2, \ldots, w_q$ mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten, was aber nicht sein kann.

Wir denken uns nun mit den auf die hier beschriebene Weise durch die Orthogonalisierung aus den $v_r(x)$ gewonnenen Funktionen $w_r(x)$ genau so einen Ansatz wie in (15·7) mit den $v_r(x)$

$$(15{\cdot}22)\qquad u = \sum_{r=1}^{p} b_r w_r(x)$$

durchgeführt, die GALERKINschen Gleichungen für die $w_r(x)$ aufgestellt und die Nullstellen der dazugehörigen Determinante (15·15) berechnet, die wir jetzt mit Λ_i^* bezeichnen wollen (der Stern hat jetzt eine andere Bedeutung als oben).

Dann ist $\Lambda_1 = \Lambda_1^*$; denn die Gesamtheit der Funktionen u im Ansatz (15·7) ist die gleiche wie die Gesamtheit der Funktionen bei dem neuen Ansatz (15·22), folglich hat auch das Minimum Λ_1 von $R[u]$ bei beiden Ansätzen denselben Wert. Aber auch die weiteren Nullstellen der beiden für die v_r und für die w_r aufgestellten Determinanten (15·15) stimmen bei den beiden Ansätzen überein:

$$(15{\cdot}23)\qquad \Lambda_i = \Lambda_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Man sieht das unmittelbar ein, wenn man die GALERKINschen Gleichungen in Matrizenform anschreibt. Führt man die Matrizen ein:

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = (d_{ik}) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pp} \end{pmatrix},$$

so kann man die Ansätze (15·7) und (15·22) mit Hilfe von (15·21) miteinander vergleichen:

$$u = \sum_{s=1}^{p} a_s v_s = \sum_{s=1}^{p} \sum_{r=1}^{p} a_s d_{sr} w_r = \sum_{r=1}^{p} b_r w_r \quad \text{mit} \quad b_r = \sum_{s=}^{p} d_{sr} a_s$$

oder

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{D}'\,\mathfrak{a}\,,$$

wobei $\mathfrak{D}'$ die zu $\mathfrak{D}$ gespiegelte (transponierte) Matrix $\mathfrak{D}' = (d_{ki})$ bedeutet.

Bezeichnet man die mit den $w_r(x)$ an Stelle der $v_s(x)$ gebildeten Zahlen (15·9) mit

$$m_{rs}^* = \int_a^b w_r M[w_s]\,dx, \quad n_{rs}^* = \int_a^b w_r N[w_s]\,dx$$

und faßt sie als Elemente zweier Matrizen $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{N}^*$ auf, so ist $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix: durch Einsetzen von (15·21) in (15·9) folgt:

$$m_{rs} = \sum_{k,l=1}^{p} d_{rk} d_{sl} m_{kl}^*, \quad n_{rs} = \sum_{k=1}^{p} d_{rk} d_{sk}$$

oder

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{M}^*\,\mathfrak{D}', \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}',$$

und die GALERKINschen Gleichungen (15·14)

$$(\mathfrak{M} - \Lambda\,\mathfrak{N})\,\mathfrak{a} = 0$$

gehen über in

$$(\mathfrak{D}\,\mathfrak{M}^*\,\mathfrak{D}' - \Lambda\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}')\,\mathfrak{a} = 0\,.$$

Multipliziert man hier von links mit der zu $\mathfrak{D}$ reziproken Matrix $\mathfrak{D}^{-1}$, so folgt

$$(\mathfrak{M}^* - \Lambda\,\mathfrak{E})\cdot(\mathfrak{D}'\,\mathfrak{a}) = \mathfrak{M}^*\,\mathfrak{b} - \Lambda\,\mathfrak{b} = 0\,.$$

Das sind aber gerade die GALERKINschen Gleichungen für den Ansatz (15·22) mit den $w_r(x)$. Ist Λ ein Wert, für den die Gleichungen (15·14) eine nichttriviale Lösung haben, so haben für denselben Wert $\Lambda = \Lambda^*$ auch die GALERKINschen Gleichungen mit dem w_r-Ansatz eine nichttriviale Lösung.

15·5. Linearer Ansatz beim Kamkeschen Minimalprinzip. Hierbei geht man genau wie in 15·3 mit einem linearen Ansatz

$$u = \sum_{r=1}^{p} a_r b_r(x)$$

in den KAMKEschen Minimalausdruck (15·2) ein. Die Funktionen $v_r(x)$ sollen zulässige Funktionen sein, sie erfüllen die wesentlichen Randbedingungen, brauchen die restlichen aber nicht zu erfüllen. Bezeichnet man die Randwerte von u und seinen Ableitungen an den beiden Randstellen a und b

$$u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(a),\ u(b),\ u'(b),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(b)$$

mit $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$, so sind die in (15·2) auftretenden DIRICHLETschen Randteile $M_0[u]$ und $N_0[u]$ quadratische Formen in den $u_1, \ldots, u_{2m}$:

$$M_0[u] = \sum_{k,l=1}^{2m} b_{kl} u_k u_l, \quad N_0[u] = \sum_{k,l=1}^{2m} c_{kl} u_k u_l\,. \tag{15·24}$$

Die Ausdrücke $M_0[u]$ und $N_0[u]$ sind für eine Reihe praktisch wichtiger Fälle in Tafel III zusammengestellt. Der Minimalausdruck $K[u]$ wird beim Einsetzen von u (genau so wie in der vorigen Nummer der Ausdruck $R[u]$) ein Quotient zweier quadratischer Formen Z^* und N^* in den a_r:

$$K[u] = \frac{Z^*}{N^*}$$

mit (m^*_{rs} und n^*_{rs} in anderer Bedeutung als in der vorigen Nummer 15·4)

$$Z^* = \sum_{r,s=1}^{p} m^*_{rs} a_r a_s, \quad N^* = \sum_{r,s=1}^{p} n^*_{rs} a_r a_s,$$

und die Durchrechnung ergibt, wenn die Randwerte der Funktion v_r

$$v_r(a),\ v_r'(a),\ \ldots,\ v_r^{(m-1)}(a),\ v_r(b),\ \ldots,\ v^{(m-1)}(b)$$

mit $v_{r,1}, v_{r,2}, \ldots, v_{r,2m}$ bezeichnet werden:

$$Z^* = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu \left(\sum_{r=1}^{p} a_r v_r^{(\nu)}\right)\left(\sum_{s=1}^{p} a_s v_s^{(\nu)}\right) dx + \sum_{k,l=1}^{2m} b_{kl} \sum_{r=1}^{p} a_r v_{r,k} \sum_{s=1}^{p} a_s v_{s,l} = \sum_{r,s=1}^{p} m^*_{rs} a_r a_s,$$

wobei man die m^*_{rs} symmetrisch schreibt, so daß $m^*_{rs} = m^*_{sr}$ ist, also:

$$(15\cdot25) \quad m^*_{rs} = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(x) v_r^{(\nu)}(x) v_s^{(\nu)}(x)\, dx + \sum_{k,l=1}^{2m} b_{kl} \frac{v_{r,k} v_{s,l} + v_{r,l} v_{s,k}}{2}.$$

Genau so wird

$$(15\cdot26) \quad n^*_{rs} = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(x) v_r^{(\nu)}(x) v_s^{(\nu)}(x)\, dx + \sum_{k,l=1}^{2m} c_{kl} \frac{v_{r,k} v_{s,l} + v_{r,l} v_{s,k}}{2}$$

Die weitere Überlegung verläuft genau wie in 15·3, nur daß man $R[u], Z, N$ hier durch $K[u]$, Z^*, N^* ersetzt. Für die ersten p Eigenwerte liefert dann das hier beschriebene Verfahren Näherungen Λ, die man als Nullstellen der Determinante

$$(15\cdot27) \quad \det(m^*_{rs} - \Lambda n^*_{rs}) = \begin{vmatrix} m^*_{11} - \Lambda n^*_{11} & m^*_{12} - \Lambda n^*_{12} & \cdots & m^*_{1p} - \Lambda n^*_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m^*_{p1} - \Lambda n^*_{p1} & m^*_{p2} - \Lambda n^*_{p2} & \cdots & m^*_{pp} - \Lambda n^*_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

zu berechnen hat.

15·6. Die Grammelschen Gleichungen. Wie in 15·3 und 15·4 gehen wir mit einem linearen Ansatz

$$u = \sum_{r=1}^{p} a_r v_r(x)$$

jetzt in den dritten in 15·1 genannten Minimalausdruck (15·5), in $\mu_1[u]$, ein. Dabei nehmen wir zunächst an, daß es sich um ein spezielles Eigenwertproblem mit der Differentialgleichung

$$M[y] = \lambda g_0(x) y$$

handelt. Die $v_r(x)$ sollen ein System von p gegebenen Vergleichsfunktionen bilden, also wie in 15·3 alle Randbedingungen erfüllen, nicht nur die wesentlichen. Dann wird (wieder genau entsprechend der Rechnung in 15·3)

$$\mu_1[u] = \frac{Z^\square}{N^\square},$$

$$Z^\square = \int_a^b \frac{1}{g_0(x)} \left(\sum_{r=1}^{p} a_r M[v_r(x)]\right)\left(\sum_{s=1}^{p} a_s M[v_s(x)]\right) dx = \sum_{r,s=1}^{p} m_{rs}^\square a_r a_s$$

mit

$$(15.28) \qquad m_{rs}^\square = \int_a^b \frac{1}{g_0(x)} M[v_r(x)]\, M[v_s(x)]\, dx;$$

entsprechend ist

$$N^\square = \sum_{r,s=1}^{p} n_{rs}^\square a_r a_s$$

mit

$$(15·29) \qquad n_{rs}^\square = \int_a^b v_r(x)\, M[v_s(x)]\, dx.$$

Die Größen $n_{rs}^\square$ stimmen überein mit den Größen m_{rs} in (15·9). Die weitere Rechnung von 15·3 überträgt sich, man hat nur an die Größen Z, N, $m_{r,s}$ und $n_{r,s}$ das Zeichen $^\square$ anzuhängen. Den Gleichungen (15·14) entsprechen hier die Gleichungen von GRAMMEL[1]):

$$(15·30) \qquad \sum_{s=1}^{p} a_s (m_{rs}^\square - \Lambda n_{rs}^\square) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, p),$$

und die Näherungswerte Λ für die ersten p Eigenwerte sind die Nullstellen der Determinante

$$(15·31) \qquad \det(m_{rs}^\square - \Lambda n_{rs}^\square) = \begin{vmatrix} m_{11}^\square - \Lambda n_{11}^\square \cdots m_{1p}^\square - \Lambda n_{1p}^\square \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{p1}^\square - \Lambda n_{p1}^\square \cdots m_{pp}^\square - \Lambda n_{pp}^\square \end{vmatrix} = 0.$$

Liegt ein allgemeines Eigenwertproblem mit der Differentialgleichung $M[y] = \lambda N[y]$ vor, so muß man anstatt auf (15·5) auf den ursprünglichen Wert (15·4) der Größe μ_1, die eine obere Schranke für λ_1 darstellt, nach (12·20) zurückgreifen. Setzt man

$$F_1(x) = u(x) = \sum_{r=1}^{p} a_r v_r(x),$$

so braucht man eine Funktion F_0, so daß $M[F_1] = N[F_0]$ nach (12·1) gilt. Dabei muß F_0 halbzulässig sein, d. h. so viele Randbedingungen erfüllen,

[1]) R. GRAMMEL, Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme, Ing.-Arch. 10 (1939) 35—46. Die Gleichungen sind dort auf andere Weise hergeleitet.

daß (12·3) gilt. (Die Forderung (12·3) bezieht sich auf *alle* Vergleichsfunktionen u, nicht nur auf die hier im Ansatz verwendeten speziellen Funktionen $u = \sum a_r v_r$.) Um F_0 zu erhalten, bestimmt man zu jeder der p Funktionen $v_r(x)$ je eine halbzulässige Funktion $w_r(x)$ mit $M[v_r] = N[w_r]$ [1]). Dann kann man

$$F_0(x) = \sum_{r=1}^{p} a_r w_r(x)$$

setzen. Man variiert nun die a_r so, daß der Quotient (15·4) $\mu_1 = \frac{Z^\square}{N^\square}$ zum Minimum wird; der Zähler $Z^\square$ hat jetzt die Bedeutung

$$Z^\square = \int_a^b \left(\sum_{r=1}^{p} a_r w_r(x)\right)\left(\sum_{s=1}^{p} a_s M[v_s]\right) dx = \sum_{r,s=1}^{p} m_{rs}^\square a_r a_s ,$$

während der Nenner $N^\square$ sich gegenüber dem Früheren (vgl. 15·29) nicht geändert hat.

An Stelle der Formel (15·28) tritt jetzt die Gleichung

$$m_{rs}^\square = \int_a^b w_r(x) M[v_s(x)] dx ,$$

während (15·29), (15·30) und (15·31) unverändert übernommen werden können.

15·7. Zahlenbeispiele. Spezielles Eigenwertproblem. Wir rechnen das in 12·2 auf andere Weise behandelte Beispiel

$$M[y] \equiv -y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1) + y'(1) = 0$$

nach den drei Minimalprinzipien durch. Die Minimalausdrücke sind bereits am Schlusse von 15·1 genannt, man hat dort nur $C = 1$ zu setzen. Wir verwenden bei allen drei Prinzipien einen zweigliedrigen Ritzschen Ansatz (15·7), und zwar mit den jeweils einfachsten Polynomen.

A. Galerkinsche Gleichungen. Es werden Funktionen v_1, v_2 gebraucht, die alle Randbedingungen erfüllen. Polynome niedrigsten Grades, die dies leisten, sind

$$v_1 = 3x - 2x^2; \quad v_2 = 2x - x^3 .$$

Dann ist $M[v_1] = 4$, $M[v_2] = 6x$. Mit ihnen berechnet man nach (15·9)

$$m_{11} = \int_0^1 v_1 M[v_1]\, dx = \int_0^1 4(3x - 2x^2)\, dx = \frac{10}{3} ,$$

$$m_{12} = \int_0^1 v_1 M[v_2]\, dx = \int_0^1 6x(3x - 2x^2)\, dx = 3 ,$$

und ebenso

$$m_{22} = \frac{14}{5}, \quad n_{11} = \frac{4}{5}; \quad n_{12} = \int_0^1 v_1 v_2\, dx = \frac{11}{15}, \quad n_{22} = \frac{71}{105} .$$

---

[1]) Für $n \geq 1$ ist also $w_r(x)$ als Lösung eines Randwertproblems festgelegt. Wir setzen voraus, daß diese Randwertprobleme für $r = 1, \ldots, p$ lösbar sind, anderenfalls hat man $v_r(x)$ geeignet abzuändern.

Damit lautet die Determinante (15·15)

$$\begin{vmatrix} \frac{10}{3} - \Lambda \frac{4}{5} & 3 - \Lambda \frac{11}{15} \\ 3 - \Lambda \frac{11}{15} & \frac{14}{5} - \Lambda \frac{71}{105} \end{vmatrix} = 0 .$$

Mit $\Lambda = 7z$ wird daraus

$$\begin{vmatrix} 50 - 84z & 45 - 77z \\ 45 - 77z & 42 - 71z \end{vmatrix} = 35z^2 - 148z + 75 = 0 .$$

Mit den Wurzeln dieser quadratischen Gleichung $z = \frac{1}{35}(74 \pm \sqrt{2851})$ erhält man als obere Schranken für die ersten beiden Eigenwerte:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{5}(74 \pm \sqrt{2851}) = \begin{cases} 4{,}1211 & (\text{Fehler } +0{,}13\%), \\ 25{,}479 & (\text{Fehler } +5{,}5\ \%). \end{cases}$$

Die genauen Eigenwerte bestimmen sich nach Tafel VI mit $\lambda = k^2$ aus der transzendenten Gleichung $\operatorname{tg} k = -k$ zu $k_1 = 2{,}02876$, $k_2 = 4{,}913$ und damit zu $\lambda_1 = 4{,}11586$; $\lambda_2 = 24{,}14$.

Über die Lage der RITZschen Näherungswerte läßt sich bei einem zweigliedrigen RITZ-Ansatz, wie wir ihn hier verwendet haben, allgemein folgendes aussagen: Sind Λ_1^* und Λ_2^* (etwa der Größe nach geordnet, d. h. $\Lambda_1^* \leq \Lambda_2^*$) die RAYLEIGHschen Quotienten, gebildet mit den Ansatzfunktionen v_1 und v_2 und sind Λ_1, Λ_2 die Näherungswerte beim zweigliedrigen Ansatz $u = a_1 v_1 + a_2 v_2$, so gilt bei selbstadjungierten Eigenwertaufgaben, die die Bedingung (8·2) erfüllen:

(15·32) $$0 < \lambda_1 \leq \Lambda_1 \leq \Lambda_1^* \leq \Lambda_2^* \leq \Lambda_2 .$$

Denn es ist

$$\Lambda_1^* = \frac{m_{11}}{n_{11}}, \quad \Lambda_2^* = \frac{m_{22}}{n_{22}}$$

und die Gleichung (15·15) läßt sich bei Berücksichtigung der Symmetrie (15·10) auf die Gestalt bringen

$$(\Lambda - \Lambda_1^*)(\Lambda - \Lambda_2^*) = \frac{(m_{12} - \Lambda n_{12})^2}{n_{11} \cdot n_{22}} .$$

Die Näherungswerte Λ_1, Λ_2 des zweigliedrigen Ansatzes müssen diese Gleichung erfüllen. Wegen der Voraussetzung (8·2) ist $n_{11} > 0$, $n_{22} > 0$, also die rechte Seite nichtnegativ und Null nur für $\Lambda = \frac{m_{12}}{n_{12}}$. Über die Lage von $\frac{m_{12}}{n_{12}}$ kann allgemein nichts ausgesagt werden, in unserem Zahlenbeispiel ist $\frac{m_{12}}{n_{12}} < \lambda_1$. Trägt man beide Seiten der Gleichung als Funktionen von Λ auf (Abb. 15·1), so erhält man zwei nach oben offene Parabeln, von denen die eine zwischen Λ_1^* und Λ_2^* negative

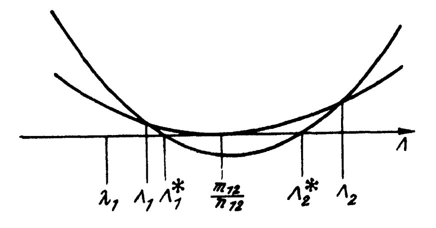


Abb. 15·1. Die Nullstellen bei einem zweigliedrigen Ritzansatz.

Werte annimmt, also sicher für $\Lambda_1^* < \Lambda < \Lambda_2^*$ keinen Punkt mit der anderen Parabel gemeinsam haben kann, d. h. es gilt (15·32)[1]. Ist z. B. v_2 eine gute Annäherung für die zweite Eigenfunktion y_2 und Λ_2^* ein wenig größer als λ_2, so fällt der neue Näherungswert Λ_2 schlechter aus! ($\Lambda_2 \geq \Lambda_2^* \geq \lambda_2$.)

B. KAMKEsches Minimalprinzip. Jetzt werden Funktionen v_1, v_2 gebraucht, die nur zulässig zu sein, also nur die wesentlichen Randbedingungen zu erfüllen brauchen. Von den Randbedingungen ist $y(0) = 0$ eine wesentliche und $y(1) + y'(1) = 0$ eine restliche. Die einfachsten Polynome v_1, v_2 mit $v_i(0) = 0$ sind $v_1 = x$, $v_2 = x^2$; also machen wir den Ansatz $u = a_1 x + a_2 x^2$. Man kann jetzt die Größen m_{rs} und n_{rs}^* nach (15·25) und (15·26) berechnen, man kann sie aber auch durch Einsetzen des Ansatzes für u in den Minimalausdruck

$$K[u] = \frac{Z^*}{N^*} = \frac{\int\limits_0^1 u'^2 dx + [u(1)]^2}{\int\limits_0^1 u^2 du}$$

erhalten. Es wird dann

$$Z^* = \int\limits_0^1 (a_1 + 2a_2 x)^2 dx + (a_1 + a_2)^2 = 2a_1^2 + 4a_1 a_2 + \frac{7}{3} a_2^2 = \sum_{r,s=1}^{2} m_{rs}^* a_r a_s,$$

also

$$m_{11}^* = 2, \quad m_{12}^* = 2, \quad m_{22}^* = \frac{7}{3}.$$

Entsprechend wird

$$N^* = \int\limits_0^1 (a_1 x + a_2 x^2)^2 dx = \frac{1}{3} a_1^2 + \frac{1}{2} a_1 a_2 + \frac{1}{5} a_2^2,$$

also

$$n_{11}^* = \frac{1}{3}, \quad n_{12}^* = \frac{1}{4}, \quad n_{22}^* = \frac{1}{5}.$$

Somit lautet die Gleichung (15·27) für die Λ

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{1}{3}\Lambda & 2 - \frac{1}{4}\Lambda \\ 2 - \frac{1}{4}\Lambda & \frac{7}{3} - \frac{1}{5}\Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Wurzeln $\Lambda = \frac{1}{3}\left(64 \pm 4\sqrt{166}\right)$ oder

$$\Lambda_1 = 4{,}1545,$$
$$\Lambda_2 = 38{,}512.$$

C. GRAMMELsche Gleichungen. Jetzt müssen die Funktionen v_1, v_2 als Vergleichsfunktionen wieder alle Randbedingungen erfüllen, wir verwenden daher

---

[1]) Dies läßt sich auch so beweisen: Nach (15·12) ist das Minimum des RAYLEIGHschen Quotienten R bei variablen a_1, a_2 die Zahl $\Lambda = \Lambda_1$, und dieses Λ ist eine Wurzel der Gleichung (15·15). Genau so muß auch das Maximum von R eine Wurzel dieser Gleichung (15·15) und damit $= \Lambda_2$ sein. Insbesondere ist also $\Lambda_2^* \leq \Lambda_2$.

dieselben Funktionen wie bei A:

$$v_1 = 3x - 2x^2, \quad v_2 = 2x - x^3$$

mit

$$M[v_1] = 4, \quad M[v_2] = 6x.$$

$g_0(x)$ hat hier den Wert 1, somit erhält man nach (15·28) und (15·29)

$$m_{11}^{\square} = 16, \quad m_{12}^{\square} = m_{22}^{\square} = 12, \quad n_{11}^{\square} = \frac{10}{3}, \quad n_{12} = 3, \quad n_{22}^{\square} = \frac{14}{5};$$

die Determinante (15·31)

$$\begin{vmatrix} 16 - \frac{10}{3}\Lambda & 12 - 3\Lambda \\ 12 - 3\Lambda & 12 - \frac{14}{5}\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

liefert

$$\Lambda_{1,2} = \frac{12}{5}(8 \pm \sqrt{39}) = \begin{cases} 4{,}2120, \\ 34\ 188 \end{cases}$$

15·8. Die höheren Ritzschen Näherungswerte. Nach dem Gedankengang des RITZschen Verfahrens sucht man, vgl. (15·12), das Minimum des RAYLEIGHschen Quotienten R auf; daher ist ohne weiteres klar, daß alle Wurzeln Λ_i, die sich aus (15·15) ergeben, obere Schranken für den ersten Eigenwert λ_1 sind. Denken wir uns wie in 15·3 die Λ_i der Größe nach geordnet, so sind überdies auch die höheren RITZschen Werte $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ obere Schranken für die entsprechenden höheren Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$, d. h. es gilt der

Satz: *Die Eigenwertaufgabe* (4·5) *bis* (4·8) *sei selbstadjungiert und volldefinit* (*d. h. es sei* (8·2) *erfüllt*) *und der Eigenwert λ trete nicht in den Randbedingungen auf. Mit den voneinander linear unabhängigen Vergleichsfunktionen $v_1, v_2, \ldots, v_p$ werde das Ritzsche Verfahren in der Galerkinschen Form durchgeführt, d. h. es werden Konstanten m_{rs}, n_{rs} nach* (15·9) *und die p Nullstellen Λ_i der Determinante* (15·15) *berechnet. Die Λ_i sind sämtlich reell; ordnet man sie der Größe nach: $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \cdots \leq \Lambda_p$, so stellen sie obere Schranken für die entsprechenden Eigenwerte dar*:

$$(15{\cdot}33) \qquad \Lambda_i \geq \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Der Beweis soll hier nur für den zweiten Eigenwert $\Lambda_2 \geq \lambda_2$ durchgeführt werden, für die höheren verläuft er ganz entsprechend. Es liegt also ein festes Funktionensystem $v_1, v_2, \ldots, v_p$ vor, mit welchem der RITZ-Ansatz

$$u = \sum_{r=1}^{p} a_r v_r$$

durchgeführt wird. Man kann sich dieses Funktionensystem bereits in verallgemeinertem Sinn orthogonalisiert und normiert denken:

$$\int_a^b v_r N[v_s]\,dx = \begin{cases} 0 \text{ für } r \neq s, \\ 1 \text{ für } r = s; \end{cases}$$

denn die Überlegungen in 15·4 haben gezeigt, daß man, falls die $v_r(x)$ voneinander linear unabhängig sind, stets durch eine lineare Transformation zu einem neuen System von Funktionen $w_s(x)$ übergehen kann, für welches (15·20) gilt und welches genau dieselben Werte Λ liefert wie der Ansatz mit den $v_r(x)$. Dann sind die Λ_i die Wurzeln der Säkulargleichung (15·18), also zugleich die „charakteristischen Zahlen" der symmetrischen Matrix $\mathfrak{M} = (m_{ik})$ oder auch die „charakteristischen Zahlen" der quadratischen Form

$$Z = \sum_{r,s=1}^{p} m_{rs} a_r a_s .$$

Der RAYLEIGHsche Quotient nimmt nach (15·8), (15·11) und (15·17) die Gestalt an:

$$R[u] = \frac{\sum\limits_{r,s=1}^{p} m_{rs} a_r a_s}{\sum\limits_{s=1}^{p} a_s^2} = Q .$$

Der Beweis für die Behauptung $\Lambda_2 \geq \lambda_2$ stützt sich auf das COURANTsche Maximum-Minimum-Prinzip für quadratische Formen[1]). Danach gilt zunächst: Es ist $\operatorname{Min} Q = \Lambda_1$, d. h. das Minimum von Q bei Variieren der a_ν ist der Wert Λ_1. Bezeichnen wir nun für beliebig gegebene Konstante $c_1, c_2, \ldots, c_p$ mit $m = m(c_r)$ das Minimum von Q unter der linearen homogenen Nebenbedingung

$$\sum_{r=1}^{p} c_r a_r = 0 ,$$

so sagt das COURANTsche Maximum-Minimum-Prinzip aus: Es ist Λ_2 gleich dem Maximum von $m(c_r)$ bei Variieren der c_r:

$$\operatorname*{Max}_{c_r} \left(\operatorname*{Min}_{a_\nu} Q \right) = \Lambda_2 .$$

Dieses Prinzip entspricht genau dem Maximum-Minimum-Prinzip für die Eigenwerte in 8·4.

Bezeichnet man nun wie in 8·4 das Minimum des RAYLEIGHschen Quotienten $R[u]$ unter der Nebenbedingung

$$\int_a^b w u \, dx = 0$$

mit $M(w)$, so ist nach dem COURANTschen Prinzip von 8·4

$$\operatorname*{Max}_{w} \left(\operatorname*{Min}_{u} R[u] \right) = \lambda_2 ,$$

---

[1]) R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl. Berlin 1931, S. 27—29.

d. h. es ist λ_2 das Maximum von $M(w)$, wenn man w den Bereich aller integrierbaren Funktionen durchlaufen läßt.

Wir beweisen nun: Es ist bei beliebig gewählter Funktion w stets $M(w) \leq \Lambda_2$. Wenn das bewiesen ist, so muß diese Ungleichung auch für den größten Wert gelten, den $M(w)$ annehmen kann, d. h. es gilt $\lambda_2 \leq \Lambda_2$.

Es sei also w eine beliebige, aber weiterhin fest gewählte Funktion. Wir berechnen zu ihr Konstanten c_r nach

$$c_r = \int_a^b w v_r \, dx$$

und bilden $m(c_r)$, d. h. das Minimum von Q (zugleich das Minimum von R) bei Variieren der a_r unter der festen Nebenbedingung

$$\sum_{r=1}^{p} c_r a_r = 0 .$$

Diese Nebenbedingung ist identisch mit der Nebenbedingung

$$\sum_{r=1}^{p} a_r \int_a^b w v_r \, dx = \int_a^b w u \, dx = 0 ,$$

$m(c_r)$ ist also das Minimum von R für die Funktionen $u = \sum_{r=1}^{p} a_r v_r$ mit der Nebenbedingung $\sum_{r=1}^{p} c_r a_r = 0$, und diese Funktionen sind nur eine Teilmenge der bei $M(w)$ zugelassenen Funktionen. Es ist also

$$m(c_r) \geq M(w) .$$

Nun ist $\Lambda_2 = \operatorname{Max} m(c_r)$, also $m(c_r) \leq \Lambda_2$, und damit folgt $M(w) \leq \Lambda_2$ und die Behauptung $\lambda_2 \leq \Lambda_2$.

Bei den höheren Eigenwerten hat man nur entsprechend mehr Nebenbedingungen heranzuziehen (wegen eines ausführlicheren Beweises vgl. Fußnote 1 von S. 221).

§ 16. Weitere Ausführungen zum Ritzschen Verfahren.

16·1. Die Eulerschen Gleichungen der Variationsrechnung. Der allgemeine Satz in 15·8, der eine exakte Grundlage für das Ritzsche Verfahren liefert, ist an einige Voraussetzungen (z. B. die Bedingung (8·2) soll erfüllt sein) geknüpft[1]). Es gibt eine Anzahl von in der Technik vorkommenden Aufgaben, bei denen diese Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind und bei denen man trotzdem das Ritzsche Verfahren anwenden kann. Man kann in vielen dieser Fälle einen Ausdruck J angeben, für den die in der Varia-

[1]) Es lassen sich auch noch etwas weitergehende Sätze aufstellen.

tionsrechnung aufstellbaren notwendigen Bedingungen für ein Minimum, die sogenannten EULERschen Gleichungen mit ihren Randbedingungen, übereinstimmen mit den vorgelegten Differentialgleichungen und ihren Randbedingungen. Wer von der Seite der Anwendungen herkommt, wird in solchen Fällen keine Bedenken tragen, das RITZsche Verfahren anzuwenden, in der Erwartung, daß man mit der unteren Grenze des RAYLEIGHschen Quotienten zugleich den kleinsten Eigenwert des Differentialgleichungsproblems annähert. Der Klarheit wegen aber sei ausdrücklich betont, daß die EULERschen Gleichungen nur notwendige, keineswegs aber hinreichende Bedingungen für ein Minimum darstellen. Wegen dieser Schwierigkeit der „klassischen" Methoden wurde das RITZsche Verfahren in § 15 völlig unabhängig von der Variationsrechnung hergeleitet; die Methode der Paragraphen 4, 5, 8, 12, 15 beantwortet die in der klassischen Variationsrechnung offengelassene Frage, ob überhaupt ein Minimum existiert.

Wir geben eine kurze Herleitung[1]) der EULERschen Gleichungen und wenden sie dann auf Eigenwertprobleme an.

Es liege das Variationsproblem vor, den Kleinstwert des Ausdrucks J zu bestimmen:

$$(16\cdot1)\quad \begin{cases} J = J[u] = \int_a^b F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(m)})\,dx + A(u(a), u'(a), \ldots, u^{(m-1)}(a)) \\ \qquad + B(u(b), u'(b), \ldots, u^{(m-1)}(b)) = \text{Minimum}; \end{cases}$$

dabei ist F eine gegebene stetige, mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur $(m+1)$-ten Ordnung einschließlich versehene Funktion von $x, u, u', \ldots, u^{(m)}$; A und B sind gegebene stetige, nach allen Argumenten stetig partiell differenzierbare Funktionen der Randwerte von $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$, und zum Vergleich sind alle $2m$-mal stetig differenzierbaren Funktionen $u(x)$ zugelassen, die gewisse fest vorgegebene lineare homogene Randbedingungen

$$(16\cdot2)\qquad V_\mu[u] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k)$$

erfüllen. Diese Randbedingungen seien von gleicher Art wie früher die $U_\mu[y] = 0$ in (4·8); sie seien voneinander linear unabhängig, und ferner mögen keine Ableitungen von höherer als der $(m-1)$-ten Ordnung vorkommen. Wir nehmen an, es gebe einen Kleinstwert von J und unter den „zugelassenen" Funktionen u eine Funktion $y(x)$, für die J den Kleinstwert annimmt:

$$(16\cdot3)\qquad J[y] \leq J[u]$$

[1]) Wegen einer ausführlicheren Darstellung siehe z. B. Fußnote 1 von S. 237, a. a. O. S. 157ff.

Ist $\eta(x)$ eine zugelassene Funktion, so kann man mit einem Parameter ε die einparametrige Schar von Funktionen

$$u(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{16·4}$$

herausgreifen, und auch für diese muß die Ungleichung (16·3) bestehen. Für diese Funktionenschar wird $J[u]$ eine stetig differenzierbare Funktion von ε, also $J[u] = \Phi(\varepsilon)$. Diese Funktion kann nur dann für $\varepsilon = 0$ ein Minimum annehmen, wenn für $\varepsilon = 0$ ihre Ableitung $\Phi'(0) = 0$ ist, (wenn also die „erste Variation" $\varepsilon \cdot \Phi'(0)$, für die man auch δJ schreibt, verschwindet).

Die Ausrechnung ergibt:

$$(16·5)\begin{cases} \Phi'(0) = \dfrac{d}{d\varepsilon}\Big\{\displaystyle\int_a^b F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta', \ldots, y^{(m)}+\varepsilon\eta^{(m)})\,dx \\ \qquad\qquad + A(y+\varepsilon\eta, \ldots, y^{(m-1)}+\varepsilon\eta^{(m-1)})_{x=a} \\ \qquad\qquad + B(y+\varepsilon\eta, \ldots, y^{(m-1)}+\varepsilon\eta^{(m-1)})_{x=b}\Big\}_{\varepsilon=0} \\ = \displaystyle\int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta' + \cdots + F_{y^{(m)}}\eta^{(m)})\,dx \\ \quad + A_y\eta(a) + \cdots + A_{y^{(m-1)}}\eta^{(m-1)}(a) + B_y\eta(b) + \cdots + B_{y^{(m-1)}}\eta^{(m-1)}(b). \end{cases}$$

Dabei bedeuten tiefgestellte Indizes partielle Ableitungen, z. B.

$$F_{y^{(i)}} = \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}.$$

Nun werden die Integrale über die einzelnen Summanden des Integranden durch Teilintegration umgeformt, bis an Stelle von $\eta^{(i)}$ der Faktor η auftritt:

$$\int_a^b F_{y'}\eta'\,dx = [\eta F_{y'}]_a^b - \int_a^b \eta\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx,$$

$$\int_a^b F_{y''}\eta''\,dx = \Big[\eta' F_{y''} - \eta\frac{d}{dx}F_{y''}\Big]_a^b + \int_a^b \eta\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\,dx$$

und ebenso bei den weiteren Summanden. Aus $\Phi'(0) = 0$ folgt damit nach (16·5)

$$\int_a^b \eta\Big[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{y^{(m)}}\Big]dx + S = 0 \tag{16·6}$$

mit dem Randausdruck

$$(16·7)\begin{cases} S = \Big[\eta F_{y'} + \Big(\eta' F_{y''} - \eta\dfrac{d}{dx}F_{y''}\Big) + \cdots + \Big(\eta^{(m-1)}F_{y^{(m)}} - \eta^{(m-2)}\dfrac{d}{dx}F_{y^{(m)}} \\ \qquad + \eta^{(m-3)}\dfrac{d^2}{dx^2}F_{y^{(m)}} - \cdots + (-1)^{m-1}\eta\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}F_{y^{(m)}}\Big)\Big]_a^b \\ + A_y\eta(a) + \cdots + A_{y^{(m-1)}}\eta^{(m-1)}(a) + B_y\eta(b) + \cdots + B_{y^{(m-1)}}\eta^{(m-1)}(b). \end{cases}$$

Nun durfte $\eta(x)$ eine beliebige zugelassene Funktion sein; daher kann (16·6) nur dann erfüllt sein, wenn die eckige Klammer des Integranden identisch verschwindet, wie man durch indirekten Beweis unmittelbar sieht: Wäre die eckige Klammer $\neq 0$, etwa > 0 an einer Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, so träfe dies auch in einer genügend kleinen Umgebung $|x - x_0| \leq \delta$ dieser Stelle zu; ist dann (16·6) für eine Funktion $\eta = \eta^*$ erfüllt, so wäre (16·6) für $\eta = \eta^{**}$ verletzt, wenn man

$$\eta^{**} = \begin{cases} \eta^* + (x - x_0 - \delta)^{2m+1}(x - x_0 + \delta)^{2m+1} & \text{für} \quad |x - x_0| \leq \delta \\ \eta^* & \text{sonst} \end{cases}$$

setzt. Es muß also

$$(16{\cdot}8) \qquad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}} = 0$$

sein; dies ist die sogenannte EULERsche Gleichung des zu (16·1), (16·2) gehörigen Variationsproblems; sie stellt eine notwendige Bedingung für die Lösungsfunktion $y(x)$ des Problems dar.

Mit dem Verschwinden der eckigen Klammer folgt aus (16·6) auch das Verschwinden des Randausdrucks S. Wir setzen nun für unsere Eigenwertprobleme voraus, daß die gegebenen, in (16·1) auftretenden Funktionen F, A und B quadratische Formen in u und den Ableitungen sind; dann ist S ein Bilinearausdruck, d. h. linear homogen sowohl in den Randwerten von y und seinen Ableitungen wie in denen von η. Es erfüllen y und η die Randbedingungen (16.2). Mit Hilfe von (16·2) können k von den $2m$ Randwerten $\eta(a), \eta'(a), \ldots, \eta^{(m-1)}(a), \eta(b), \eta'(b), \ldots, \eta^{(m-1)}(b)$ durch die übrigen dieser Randwerte ausgedrückt werden. Diese übrigen $2m - k$ Randwerte der Ableitungen mögen „freie Randwerte" heißen[1]) und in irgendeiner Reihenfolge mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2m-k}$ bezeichnet werden. Drückt man in S alle Randwerte von η durch die freien Randwerte aus, so nimmt S die Gestalt an

$$(16{\cdot}9) \qquad S = \sum_{\nu=1}^{2m-k} \eta_\nu \cdot W_\nu[y] = 0,$$

wobei $W_\nu[y]$ in den Randwerten von y linear homogen ist. Da die η_ν beliebig gewählt werden können und es zu jeder Wahl der η_ν zugelassene Funktionen gibt, folgt aus (16·9)

$$(16{\cdot}10) \qquad W_\nu[y] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2m - k).$$

Das sind $2m - k$ notwendige Randbedingungen für die Lösungsfunktion y des Variationsproblems (16·1), (16·2), die im allgemeinen von den k Randbedingungen (16·2) verschieden sein werden, so daß dann insgesamt $2m$ Randbedingungen für die einer Differentialgleichung $2m$-ter Ordnung ge-

[1]) E. KAMKE, Math. Z. 48 (1942) 70.

nügende Funktion y vorhanden sind. Über die Lösbarkeit dieses Randwertproblems, über die Eindeutigkeit der Lösung und über die Verschiedenheit der Randbedingungen (16·2) und (16·10) wird in der Allgemeinheit, in der hier die Aufgabe behandelt wurde, nichts ausgesagt.

16·2. Beispiel. Ein Eigenwertproblem. Für die Biegeschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes der Länge l, der am freien Ende eine Einzelmasse M trägt und für den Biegesteifigkeit α und Masse pro Längeneinheit μ konstant sind (Abb. 16·1), lautet das zugehörige Variationsproblem, wie in 16·4 näher begründet wird,

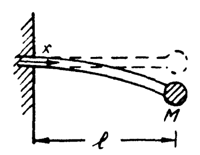


Abb. 16·1. Biegeschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes mit Einzelmasse.

$$J = \int_0^l (\alpha u''^2 - \lambda \mu u^2)\,dx - \lambda M \cdot u(l)^2 = \text{Extremum} \tag{16·11}$$

mit den wesentlichen Randbedingungen

$$u(0) = u'(0) = 0\,. \tag{16·12}$$

Der Ausdruck $\Phi'(0)$, der bis auf den Faktor ε die erste Variation darstellt und verschwinden muß, lautet hier, wie man durch Teilintegration sofort erhält,

$$0 = \left[\frac{\partial J[y + \varepsilon\eta]}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_0^l [(\alpha y'')'' - \lambda\mu y]\eta\,dx + S \tag{16·13}$$

mit

$$S = [\eta'\alpha y'']_0^l - [\eta(\alpha y'')']_0^l - \lambda M y(l)\eta(l)$$
$$= \eta(0)\cdot(\alpha y'')'_{x=0} - \eta'(0)\cdot(\alpha y'')_{x=0} + \eta(l)\cdot[-(\alpha y'')' - \lambda M y]_{x=l}$$
$$+ \eta'(l)\cdot(\alpha y'')_{x=l}.$$

$\eta(0)$ und $\eta'(0)$ verschwinden nach (16·12). $\eta(l)$ und $\eta'(l)$ sind freie Randwerte. Also folgt aus $S = 0$ das Verschwinden der Faktoren von $\eta(l)$ und $\eta'(l)$, und man erhält für y die Randbedingungen

$$[(\alpha y'')' + \lambda M y]_{x=l} = 0; \quad y''(l) = 0\,.$$

Zu diesen Randbedingungen treten noch $y(0) = y'(0) = 0$ für y hinzu. Die Differentialgleichung für y ist die gleich Null gesetzte eckige Klammer in (16·13), d. h.

$$(\alpha y'')'' = \lambda\mu y\,.$$

λ ergibt sich als Eigenwert dieses Differentialgleichungsproblems.

Man kann die Gleichungen dieses Eigenwertproblems auch als notwendige Bedingungen für ein anderes Variationsproblem auffassen. Tritt der Eigenwert linear auf, wie es jetzt angenommen werde, und sind die Funktionen F, A, B von (16·1) quadratische Formen in u und den

Ableitungen von u, so kann man den Ausdruck J von (16·1) in der Form $J = J_1 + \lambda J_2$ darstellen, wobei J_1 und J_2 nicht mehr die Größe λ enthalten. Dann sind die notwendigen Bedingungen (16·8), (16·10) dieselben, als wenn man nach dem Minimum des Ausdruckes J_1 unter der Nebenbedingung $J_2 = \text{const}$, etwa $J_2 = 1$, fragen oder als wenn man das Minimum des Quotienten

$$Q = \frac{J_1}{J_2}$$

aufsuchen würde[1]).

16·3. Umkehrung der Fragestellung und Ritzsches Verfahren. In 16·1 hatten wir zu einem vorgelegten Variationsproblem (16·1), (16·2) als notwendige Bedingungen für die Lösungsfunktion die EULERsche Differentialgleichung (16·8) und weitere Randbedingungen (16·10) angegeben. Die umgekehrte Fragestellung, zu einer vorgelegten Differentialgleichung und gegebenen Randbedingungen ein zugehöriges Variationsproblem (16·1), (16·2) anzugeben, für das Differentialgleichungen und Randbedingungen gerade notwendige Bedingungen für die Lösung sind, läßt sich nicht so leicht beantworten; es gibt nicht zu jedem beliebig vorgelegten Differentialgleichungsproblem ein zugehöriges Variationsproblem, z. B. schon dann nicht, wenn die Ordnung der Differentialgleichung ungerade ist, aber auch bei gerader Ordnung der Differentialgleichung gibt es nicht immer ein zum Problem passendes Variationsproblem.

Eine Differentialgleichung in der selbstadjungierten Form

$$\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu [f_\nu(x)\, y^{(\nu)}]^{(\nu)} = \lambda \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu [g_\nu(x)\, y^{(\nu)}]^{(\nu)}$$

läßt sich dagegen stets als EULERsche Differentialgleichung (16·8) schreiben, man braucht nur in (16·1)

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu [y^{(\nu)}]^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu [y^{(\nu)}]^2 \tag{16·14}$$

zu setzen. Die wesentlichen Randbedingungen verwendet man als (16·2). Man wird dann versuchen, zwei quadratische Formen A und B in (16·1) so anzugeben, daß (16·10) mit den vorgegebenen restlichen Randbedingungen übereinstimmt; ob und wann das möglich ist, soll hier allgemein nicht untersucht werden. Für die selbstadjungierten volldefiniten Eigenwertprobleme, bei denen λ nicht in den Randbedingungen auftritt, wurden in § 15 zugehörige Variationsprobleme aufgestellt, und für die meisten, sonst noch in Physik und Technik vorkommenden Eigenwertprobleme kann man durch Energiebetrachtungen, und zwar oft auf kürzerem Wege als über die Diffe-

[1]) Nach den Regeln der Variationsrechnung für Probleme mit Nebenbedingungen vgl. etwa Fußnote 1 von S. 237, a. a. O. S. 187ff.

rentialgleichung, ein zum Problem gehöriges Variationsproblem aufstellen. Hierzu sollen in 16·4 und 16·5 einige Beispiele gegeben werden.

Hat man einen zu dem Problem gehörigen, zum Minimum zu machenden Ausdruck $J[u]$ der Gestalt (16·1), so kann man das RITZsche Verfahren wie in § 15 anwenden. Man geht mit einem (gewöhnlich linearen) Ansatz (15·7)

$$u = \sum_{i=1}^{p} a_i v_i(x) \tag{16·15}$$

in (16·1) ein und erhält in

$$\frac{\partial J\left[\sum_{i=1}^{p} a_i v_i(x)\right]}{\partial a_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{16·16}$$

die Gleichungen des RITZschen Verfahrens. Als $v_i(x)$ verwendet man voneinander linear unabhängige, die wesentlichen Randbedingungen erfüllende, genügend oft differenzierbare Funktionen.

16·4. Die Energiemethode bei Schwingungsaufgaben. Vorgelegt sei irgendein schwingungsfähiges System, etwa ein elastischer Körper, der kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage (Ruhelage) ausführen kann. Bei einer Eigenschwingung werde die Schwingung eines jeden Teilchens als sinusförmig angenommen, so daß die Auslenkung[1]) aus der Ruhelage zur Zeit t durch $y(t) = Y \sin \omega t$ gegeben ist. Dabei ist weiterhin angenommen, daß alle Teilchen bei der Eigenschwingung in gleichem Rhythmus schwingen, d. h. mit gleicher Kreisfrequenz ω und gleicher Phase, alle Teilchen passieren in demselben Augenblick die Ruhelage, und alle Teilchen erreichen in demselben Augenblick ihren Maximalausschlag, die Amplitude Y. Dieser Wert Y ist noch von dem betreffenden Teilchen abhängig, d. h. eine Ortsfunktion.

Nun wird die kinetische Energie T und die potentielle Energie U aufgestellt. Bezeichnet ϱ die Dichte und dv das Volumelement des Körpers, so ist

$$T = T(t) = \frac{1}{2} \int \varrho \dot{y}^2 \, dv = \frac{1}{2} \int \varrho \omega^2 Y^2 \cos^2 \omega t \, dv = T^* \omega^2 \cos^2 \omega t. \tag{16·17}$$

Dabei ist

$$T^* = \frac{1}{2} \int \varrho Y^2 \, dv \tag{16·18}$$

die sogenannte „bezogene kinetische Energie".

Der Ausdruck für die potentielle Energie U hängt von dem betreffenden schwingenden Körper ab und kann nicht allgemein hingeschrieben werden.

---

[1]) y ist abhängig von der Lage des herausgegriffenen Teilchens, die durch Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_r$ gekennzeichnet werden kann. Es müßte also statt $y(t)$ eigentlich $y(t, x_1, x_2, \ldots, x_r)$ geschrieben werden.

Sie ist die Arbeit, die geleistet werden muß, um die durch $y(t)$ angegebene Lagenänderung der einzelnen Teilchen hervorzurufen, und kann z. B. in Arbeit gegen äußere Kräfte, in Formänderungsarbeit usw. bestehen. Sie ist jedenfalls bei dem vorgelegten System als bekannt anzusehen und hängt in angebbarer Weise von den Auslenkungen y ab.

Bei dem Schwingungsvorgang werde von Dämpfungen abgesehen. Dann ist nach dem Energiesatz $E = T(t) + U(t)$ zeitlich konstant, d. h. bei maximalem T ist U am kleinsten und umgekehrt. Setzt man eine bei U noch freie additive Konstante so fest, daß in der Ruhelage $U = 0$ ist, so ist die Gesamtenergie $E = T_{max} = U_{max}$, es findet bei der Schwingung vollständiger Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie statt.

Nun ist nach (16·17) $T_{max} = \omega^2 \cdot T^*$, also

$$\omega^2 = \frac{U_{max}}{T^*}. \tag{16·19}$$

Kennt man die Schwingungsform, d. h. die Verteilung der Amplituden Y über den Körper, so kann man nach dieser Formel die zugehörige Kreisfrequenz ω berechnen.

Nun sagt das „RAYLEIGHsche Prinzip" der Mechanik aus: Setzt man in (16·19) rechts für Y eine irgendwie geschätzte, aber mögliche, d. h. mit den Randbedingungen verträgliche Schwingungsform ein, so ist der entstehende Wert größer oder gleich dem Quadrat ω_1^2 der kleinsten Eigenkreisfrequenz, oder anders ausgedrückt, ω_1^2 ist das Minimum des Quotienten (16·19), wenn man alle mit den Randbedingungen verträglichen Amplitudenverteilungen Y zum Vergleich heranzieht.

Man macht sich dieses Prinzip oft auf folgende Weise plausibel[1]): Ist Y^* eine beliebig gewählte, aber die Randbedingungen erfüllende Amplitudenverteilung, so vergleicht man das vorgelegte System mit einem anderen System, welches nur noch einen Freiheitsgrad hat und bei welchem man den Körper zwingt, nur Auslenkungen der Form $y = c \cdot Y^*$ anzunehmen, wobei c nur von der Zeit t, aber nicht vom Orte abhängt. Derartige Zwangsbedingungen erhöhen im allgemeinen die Steifheit des Körpers und damit auch die Frequenz der Grundschwingung.

Diese Schlußweise stellt natürlich keinen strengen Beweis für die Minimaleigenschaft von ω_1^2 dar; es wird sich die Minimaleigenschaft wohl auch schwer in einer solchen Allgemeinheit durch derartige einfache Überlegungen beweisen lassen. Immerhin gilt die Minimalaussage streng in einer großen Anzahl von Fällen, z. B. wenn das betreffende Problem auf ein Eigenwertproblem führt, das die Voraussetzungen des Satzes in 15·8 erfüllt; in diesen

[1]) S. TIMOSHENKO, Schwingungsprobleme der Technik, Berlin 1932, S. 288.

Fällen stimmt der Ausdruck (16·19) mit dem RAYLEIGHschen Quotienten (4·25) überein. Man wird nun auch in denjenigen in der Technik vorkommenden Fällen, in denen die Minimaleigenschaft von ω_1^2 nicht streng bewiesen ist, das RAYLEIGHsche Prinzip der Mechanik als richtig postulieren und als Grundlage des RITZschen Verfahrens zur angenäherten Berechnung von ω_1 benutzen.

Das RITZsche Verfahren wird dann wieder in der bereits in § 15 und am Schluß von 16·3 beschriebenen Art durchgeführt: man macht einen Ansatz

$$Y = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i \tag{16·20}$$

mit a_i als Konstanten und x_i als möglichen Amplitudenfunktionen. Anstatt den Quotienten $\frac{U_{\max}}{T^*}$ zum Minimum zu machen, kann man nach den Regeln der Variationsrechnung auch die Forderung (mit $\omega^2 = \lambda$)

$$J = U_{\max} - \lambda T^* = \text{Extremum} \tag{16·21}$$

und damit die Gleichungen des RITZschen Verfahrens in der Form

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{16·22}$$

aufstellen.

16·5. Biegeschwingungen. Läßt man zur Berechnung der Eigenfrequenzen bei Biegeschwingungen von Trägern, Rahmen, Stabwerken, Nebeneinflüsse durch Längsschwingungen, Rotationsträgheit und Schubkräfte beiseite, so sind bezogene kinetische Energie T^* und potentielle Energie $U_{\max}$ durch die Ausdrücke gegeben:

$$T^* = \frac{1}{2}\int \varrho F u^2 ds . \tag{16·23}$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{\varkappa} ds = \frac{1}{2}\int \varkappa u''^2 ds . \tag{16·24}$$

Dabei bedeutet wie üblich ϱ die Dichte, F die Querschnittsfläche, $\varkappa$ die Biegesteifigkeit, M das Biegemoment, s die Bogenlänge und ferner u die Amplitude (bisher mit Y bezeichnet). Das Integral ist über den Körper, also z. B. über das gesamte Stabwerk, zu erstrecken.

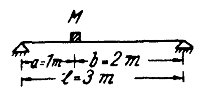


Abb. 16·2. Biegeschwingungen eines an den Enden gestützten Trägers mit Einzelmasse.

Als Beispiel sei ein Träger konstanten Querschnitts mit aufgesetzter Einzelmasse M vorgelegt. Der Träger habe die Länge $l = 3$ m. Anordnung und Abmessungen zeigt Abb. 16·2. Die Einzelmasse M betrage zwei Drittel der Gesamtmasse $\varrho F l$ des Trägers. Die Energieausdrücke T^* und $U_{\max}$ von (16·23), (16·24) lauten hier

$$T^* = \frac{1}{2}\int \varrho F u^2 dx + \frac{1}{2} M(u(1))^2 ,$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\int \varkappa u''^2 dx .$$

Bei Einsetzen von $M = \frac{2}{3}\varrho F l$ geht (16·19) über in

$$\lambda_1 = \frac{\varrho F}{\alpha}\cdot\omega_1^2 \leq R[u] = \frac{\int\limits_0^3 u''^2\,dx}{\int\limits_0^3 u^2\,dx + 2\,u^2(1)} = \frac{Z}{N}\,.$$

Die Randbedingungen sind $u(0) = u''(0) = u(3) = u''(3) = 0$. In der folgenden Zusammenstellung ist in der ersten Zeile für u die alle Randbedingungen erfüllende Funktion $u = \sin\frac{\pi}{3}x$ angeführt, die für die Grundschwingung einen kleineren, also besseren Wert liefert als die in der zweiten Zeile stehende Funktion $u = 3x - x^2$ der zweiten Zeile, die nur die wesentlichen Randbedingungen $u(0) = u(3) = 0$ erfüllt. In der dritten Zeile sind bei $R[u]$ die Ergebnisse eines zweigliedrigen, in der vierten Zeile die eines dreigliedrigen Ritz-Ansatzes mitgeteilt.

u	Z	N	R
$\sin\frac{\pi}{3}x$	$\frac{\pi^4}{81}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3$	$\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{3}{4} = 3$	$\frac{\pi^4}{81}\cdot 0{,}5 = 0{,}601\,29$
$3x - x^2$	12	$\frac{81}{10} + 2\cdot 4 = \frac{161}{10}$	$\frac{120}{161} = 0{,}7453$
$a_1\sin\frac{\pi}{3}x + a_2\sin\frac{2\pi}{3}x$	$\frac{\pi^4}{81}\cdot\frac{3}{2}(a_1^2 + 16a_2^2)$	$3a_1^2 + \frac{3}{2}2a_1a_2 + 3a_2^2$	$\frac{\pi^4}{81}\frac{1}{3}\left(17 \pm \sqrt{241}\right) = \frac{\pi^4}{81}\cdot\begin{cases}0{,}491\,93\\10{,}84\end{cases} = \begin{cases}0{,}591\,59\\13{,}03\end{cases}$
$\sum\limits_{\nu=1,2,4} a_\nu\sin\frac{\nu\pi x}{3}$	$\frac{\pi^4}{81}(a_1^2 + 16a_2^2 + 256a_4^2)$	$3(a_1^2 + a_2^2 + a_4^2) + a_1a_2 - a_1a_4 - a_2a_4$	$\begin{cases}0.590\,97\\12\,94\\233\end{cases}$

16·6. Beispiel. Torsionsschwingungen. Als weiteres Beispiel[1]) werden die Torsionsschwingungen einer Welle mit Kreisquerschnitt und mit aufgesetzten Einzeldrehmassen betrachtet (Abb. 16·3).

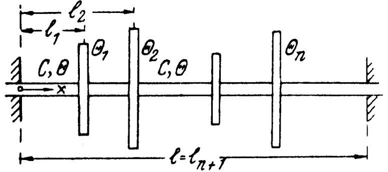


Abb. 16·3. Torsionsschwingungen einer Welle mit aufgesetzten Einzeldrehmassen.

[1]) Wegen der Unstetigkeiten in den Ableitungen (nach (16·28)) sind die Aussagen dieses Buches für den vorliegenden Fall nicht bewiesen. Dies ist also (vgl. 16·4) ein technisch vorkommendes Beispiel, in welchem man keine Bedenken tragen wird, trotzdem das Ritzsche Verfahren unter Zugrundelegung des Variationsproblems (16·29) anzuwenden. Übrigens läßt sich die Theorie dieses Buches leicht auf Fälle wie den vorliegenden übertragen, vgl. z. B. die Bemerkung am Schlusse dieser Nummer, ferner G. Temple und W. G. Bickley, Rayleigh's Principle and its Application to Engineering, London 1933.

Die x-Achse weise in Richtung der Wellenachse; Verdrehungssteifigkeit C und Massenträgheitsmoment Θ pro Längeneinheit der Welle seien konstant. An den Stellen $x = l_i$ (für $i = 1, 2, \ldots, n$) seien Einzeldrehmassen mit den Massenträgheitsmomenten Θ_i bezüglich der Wellenachse aufgesetzt. Nimmt man die Endstellen $x = 0$ und $x = l$ als eingespannt an und bezeichnet $\varphi(x, t)$ den Winkel, um den der Wellenquerschnitt an der Stelle x zur Zeit t aus der Ruhelage ausgelenkt ist, so ist mit $\varphi(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t$ die bezogene kinetische Energie gegeben durch

$$(16\cdot25) \qquad T^* = \frac{1}{2}\left[\int_0^l (\Phi(x))^2\, \Theta(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \Theta_i (\Phi(l_i))^2\right],$$

und die maximale potentielle Energie lautet

$$(16\cdot26) \qquad U_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^l C(x)\, (\Phi'(x))^2\, dx\,.$$

(Hier ist des allgemeinen Ansatzes wegen noch $C(x)$ und $\Theta(x)$ geschrieben.)

Mit

$$\lambda^* = \omega^2 \frac{\Theta}{C}; \quad D_i^* = \frac{\Theta_i}{\Theta}$$

und konstantem C und Θ hat man nach (16·21) als zugehöriges Variationsproblem (das jetzige λ^* unterscheidet sich um den Faktor $\frac{C}{\Theta}$ von dem λ in (16·21))

$$(16\cdot27) \quad J^* = \int_0^l (\Phi'(x))^2 dx - \lambda^* \left[\int_0^l (\Phi(x))^2 dx + \sum_{i=1}^n D_i^* (\Phi(l_i))^2\right] = \text{Extremum}.$$

Wegen der vorausgesetzten Einspannung der Enden hat man als wesentliche Randbedingungen $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$, bei frei drehbaren Enden hätte man $\Phi'(0) = \Phi'(l) = 0$.

Weiter kommen Übergangsbedingungen an den Stellen $x = l_i$ hinzu. Es ist Φ stetig bei $x = l_i$, während Φ' dort einen Sprung macht. Die Sprungbedingungen kann man unmittelbar aus der für die Drehmasse Θ_i angeschriebenen Bewegungsgleichung gewinnen, man kann sie auch nach dem Verfahren von 16·1 aus dem Variationsproblem herleiten; das sei hier zur Erläuterung vorgeführt. Setzt man wie bei (16·4) $\Phi = y + \varepsilon\eta$ in (16·27) ein und wendet man auf das erste Integral Teilintegration an, so erhält man mit $l_0 = 0$, $l_{n+1} = l$ wegen

$$\int_0^l y'\eta'\, dx = \sum_{i=0}^n \int_{l_i}^{l_{i+1}} y'\eta'\, dx = -\sum_{i=0}^n \int_{l_i}^{l_{i+1}} \eta y''\, dx + \sum_{i=0}^n [y'\eta]_{l_i}^{l_{i+1}}$$

als Faktor von ε die Gleichung (Verschwinden der ersten Variation)

$$\int_0^l \eta(-y'' - \lambda^* y)\, dx + \sum_{i=1}^n \eta(l_i)\,[-y'(l_i + 0) + y'(l_i - 0) - \lambda^* D_i^*\, y(l_i)] = 0\,.$$

Dabei ist bereits $\eta(0) = \eta(l) = 0$ benutzt, und $y'(l_i - 0)$ bzw. $y'(l_i + 0)$ bedeuten üblicherweise die Grenzwerte von y', wenn man von links bzw. von rechts an die Stelle l_i herangeht. Man liest also unmittelbar die Differentialgleichung $-y'' = \lambda^* y$ und die Übergangsbedingungen

$$(16\cdot28) \qquad y'(l_i + 0) - y'(l_i - 0) = -\lambda^* D_i^* y(l_i)$$

ab.

Zahlenbeispiel: Es liege das bereits in der Aufgabe 7 von 3·4 behandelte System vor, vgl. Abb. 3·11. Dabei ist $l_1 = 1\,m$, $l_2 = 2l_1$, $l = l_3 = 3l_1$.

Es werden „dimensionslose" Größen eingeführt:

$$x = l_1\xi, \quad D_i = \frac{D_i^*}{l_1}, \quad \varphi(\xi) = y(l_1\xi), \quad \varphi'(\xi) = l_1 y'(x), \quad \lambda = \lambda^* l_1^2 .$$

Dann lautet das Variationsproblem (16·27)

$$(16\cdot29) \qquad J[\varphi] = \int_0^3 \varphi'^2 d\xi - \lambda\left[\int_0^3 \varphi^2 d\xi + D_1\varphi(1)^2 + D_2\varphi(2)^2\right] = \text{Extremum}$$

mit den wesentlichen Randbedingungen

$$(16\cdot30) \qquad \varphi(0) = \varphi(3) = 0$$

und den (16·28) entsprechenden Übergangsbedingungen

$$(16\cdot31) \qquad \begin{cases} \varphi'(1+0) - \varphi'(1-0) = -\lambda D_1\varphi(1), \\ \varphi'(2+0) - \varphi'(2-0) = -\lambda D_2\varphi(2). \end{cases}$$

Für den Fall $D_1 = 1$, $D_2 = 2$ wird folgender zweiparametriger Ritz-Ansatz durchgeführt:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} a_1\xi & \text{für } \xi \leq 1, \\ a_1 + a_2(1-\xi) & \text{für } 1 \leq \xi \leq 2, \\ (a_1 - a_2)(3-\xi) & \text{für } 2 \leq \xi \leq 3. \end{cases}$$

Beim Einsetzen von φ in den Ausdruck J (16·29) ergibt sich mit Λ als Näherungswert für λ:

$$J = 2(a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2) - \frac{\Lambda}{3}(14a_1^2 - 17a_1a_2 - 8a_2^2).$$

Die Gleichungen $\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial a_2} = 0$ führen dann mit $\frac{\Lambda}{6} = \mu$ auf

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - 28\mu & 1 - 17\mu \\ 1 - 17\mu & 2 - 16\mu \end{vmatrix} = 3(1 - 18\mu + 53\mu^2)$$

und

$$\Lambda = \frac{6}{53}(9 \pm \sqrt{28}) = \begin{cases} 0{,}41983 \ (\text{Fehler} + 1{,}1\%), \\ 1{,}6179 \ (\text{Fehler} + 2{,}9\%); \end{cases}$$

Der zweigliedrige Ritz-Ansatz

$$\varphi = a_1 \sin\frac{\pi}{3}\xi + a_2 \sin\frac{2\pi}{3}\xi$$

führt mit

$$J = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{a_1^2}{2} + 2a_2^2\right) - 3\Lambda\left(\frac{5}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1a_2 + \frac{5}{4}a_2^2\right)$$

auf die schlechteren Werte

$$\Lambda = \begin{cases} 0{,}4330 \ (\text{Fehler} + \ 4\%), \\ 1{,}8517 \ (\text{Fehler} + 18\%). \end{cases}$$

Der zuerst mit linearen Funktionen durchgeführte RITZ-Ansatz erfaßt die Knicke in der φ-Kurve (vgl. Abb. 3·12) besser.

Man kann im Falle von verteilten Massen und Einzelmassen die Eigenwerttheorie ganz entsprechend zu den Kapiteln II und III durchführen, wir geben nur als Beispiel die Orthogonalitätseigenschaft an. Sind φ_i, φ_k zwei Eigenfunktionen von $-\varphi'' = \lambda\varphi$ mit (16·30), (16·31) zu verschiedenen Eigenwerten, so rechnet man sofort aus, daß dann

$$\int_0^3 \varphi_i \varphi_k d\xi + D_1 \varphi_i(1) \varphi_k(1) + D_2 \varphi_i(2) \varphi_k(2) = 0 \qquad (\text{für } \lambda_i \neq \lambda_k)$$

ist, und nennt diese Beziehung „belastete Orthogonalität". Man kann durch Einschieben von Stücken der Länge D_i, in denen man φ_i konstant setzt, Funktionen ψ_i

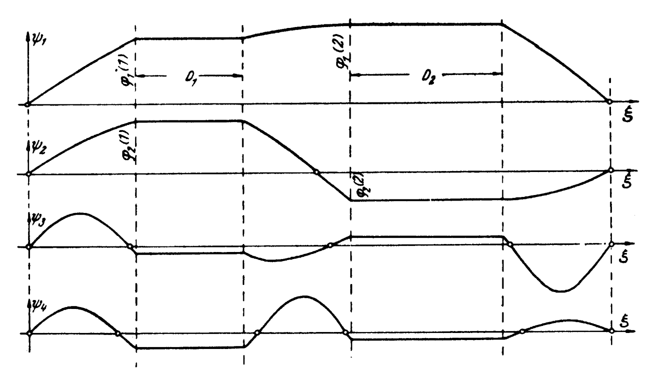


Abb. 16·4. Ersetzen von Funktionen φ mit belasteter Orthogonalität durch Funktionen ψ_i mit gewöhnlicher Orthogonalität.

aufstellen, die im gewöhnlichen Sinne orthogonal sind. Auf diese Weise entsteht aus Abb. 3·12 die Darstellung der ψ_i in Abb. 16·4.

16·7. Energiemethode bei partiellen Differentialgleichungen. Die in 16·4 beschriebene Energiemethode ist ohne weiteres auch bei partiellen Eigenwert-Differentialgleichungen anwendbar. Wir erläutern sie an dem klassischen Beispiel der homogenen Membran der Dicke h und der Dichte ϱ, die Transversalschwingungen ausführt. Die Mittelebene der Membran bedecke in der Ruhelage einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ der x-y-Ebene; die Membran sei längs ihres Randes Γ eingespannt und gleichmäßig gespannt; d. h. legt man durch die Membran einen beliebigen, zu ihrer Mittelebene senkrechten Schnitt, so wirken auf die Schnittfläche keine Schubspannungen und nur überall gleich große Normalspannungen σ.

Werden die Auslenkungen aus der x-y-Ebene zur Zeit t mit $z(x, y, t)$ bezeichnet, so ist mit

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \cdot \sin \omega t$$

die bezogene kinetische Energie nach (16·18) gegeben durch

$$T^* = \frac{1}{2}\varrho h \iint_{\mathfrak{B}} Z^2(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Die potentielle Energie U ist im wesentlichen durch die Vergrößerung des Flächeninhaltes der Membran gegeben[1]), und zwar bei den als klein vorausgesetzten Auslenkungen z durch

$$U = \frac{1}{2}\sigma h \iint_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy\,.$$

Die zu einer Eigenschwingungsform $Z(x, y)$ gehörige Eigenkreisfrequenz ω ist dann nach (16·19) gegeben durch

(16·32) $$\lambda = \frac{\varrho\omega^2}{\sigma} = \frac{\iint_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy}{\iint_{\mathfrak{B}} Z^2(x, y)\, dx\, dy}\,.$$

Das Zählerintegral kann wegen der Randbedingung $Z = 0$ auf Γ auch in der Gestalt (nach der Umformung in 6·2 für $p = 1$, $q = 0$)

(16·33) $$-\iint_{\mathfrak{B}} Z\,\Delta Z\, dx\, dy$$

mit dem LAPLACEschen Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

geschrieben werden.

Kennt man die Schwingungsform $Z(x, y)$ nicht, so kann man wie in (16·20) bis (16·22) die Eigenkreisfrequenzen mit Hilfe des RITZschen Verfahrens angenähert berechnen.

Beispiel: Elliptische Membran[2]). Der Rand Γ der Membran sei die Ellipse (Abb. 16·5)

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1\,.$$

Die Schwingungsformen $Z(x, y)$ können mit Hilfe MATHIEUscher Funktionen dargestellt werden, allerdings in komplizierter Weise. Hier soll zur genäherten Bestimmung der Eigenwerte ein dreigliedriger RITZ-Ansatz

$$Z = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i(x, y)$$

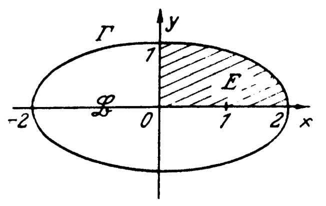


Abb. 16·5. Elliptische Membran.

---

[1]) S. TIMOSHENKO, Schwingungsprobleme der Technik. Berlin 1932, S. 326.

[2]) E. TREFFTZ, Über Fehlerabschätzung bei Berechnung von Eigenwerten, Math. Ann. 108 (1933) 595—602.

durchgeführt werden. Als $v_i(x, y)$ werden, wenn man etwa nur die zur x- und y-Achse symmetrischen Schwingungsformen betrachtet, die am Rande Γ verschwindenden Funktionen benutzt:

$$v_1(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2,$$
$$v_2(x, y) = x^2 \cdot v_1(x, y),$$
$$v_3(x, y) = y^2 \cdot v_1(x, y).$$

Dann ist $\Delta Z = -10a_1 + 4(2 - 5x^2 - 2y^2)a_2 + 2(4 - x^2 - 25y^2)a_3$. Bei der Durchführung des Verfahrens treten die Integrale $\iint\limits_{\mathfrak{B}} x^{2m} y^{2n} dx\, dy$ auf. Aus Symmetriegründen kann man sich bei allen Integralen auf das in Abb. 16·5 schraffierte Gebiet eines Ellipsenquadranten E beschränken. Dann berechnet man leicht die Integrale

$$a_{2m,2n} = \frac{1}{\pi} \iint\limits_E x^{2m} y^{2n} dx dy.$$

Es ist

$$a_{00} = \frac{1}{2}, \quad a_{02} = \frac{1}{8}, \quad a_{04} = \frac{1}{16}, \quad a_{06} = \frac{5}{128}, \quad a_{08} = \frac{7}{256},$$
$$a_{20} = \frac{1}{2}, \quad a_{22} = \frac{1}{12}, \quad a_{24} = \frac{1}{32}, \quad a_{26} = \frac{1}{64},$$
$$a_{40} = 1, \quad a_{42} = \frac{1}{8}, \quad a_{44} = \frac{3}{80},$$
$$a_{60} = \frac{5}{2}, \quad a_{62} = \frac{1}{4},$$
$$a_{80} = 7.$$

Mit Hilfe dieser Integrale läßt sich

$$J = -\iint\limits_E (Z\Delta Z)\, dx dy - \lambda \iint\limits_E Z^2 dx dy$$

durch die a_1, a_2, a_3 ausdrücken, und die Gleichungen (16·22) ergeben für die Näherungswerte Λ der Eigenwerte λ die Bestimmungsgleichung

$$\begin{vmatrix} 10 - \frac{8}{3}\Lambda & \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda & \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\Lambda \\ \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda & \frac{46}{3} - \frac{8}{5}\Lambda & \frac{5}{6} - \frac{2}{15}\Lambda \\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\Lambda & \frac{5}{6} - \frac{2}{15}\Lambda & \frac{47}{24} - \frac{1}{10}\Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Mit $2\Lambda = 5(2 - \nu)$ erhält man

$$\begin{vmatrix} -1 + 2\nu & \nu & \nu \\ 5\nu & 11 + 6\nu & 1 + 2\nu \\ 5\nu & 1 + 2\nu & 35 + 6\nu \end{vmatrix} = 4(6\nu^3 + 73\nu^2 + 124\nu - 96) = 0$$

und nach Auflösung dieser kubischen Gleichung

$$\Lambda = \begin{cases} 3{,}5692 \\ 12{,}045 \\ 29{,}803. \end{cases}$$

Bei Durchrechnung eines zweigliedrigen RITZ-Ansatzes, bei dem man das Glied mit $v_3(x, y)$ fortläßt, ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 10 - \frac{8}{3}\Lambda & \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda \\ \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda & \frac{46}{3} - \frac{8}{5}\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

und daraus

$$\Lambda = \frac{5}{14}\left(22 \pm \sqrt{141}\right) = \begin{cases} 3{,}6163 \\ 12{,}098\,. \end{cases}$$

16·8. Ausweichprobleme. Auch bei Ausweichproblemen kann man die zum Minimum zu machenden Ausdrücke J und damit die Möglichkeit für die Anwendung des RITZschen Verfahrens oft bequem mit Hilfe von Energiebetrachtungen gewinnen, doch kann hier nicht im einzelnen darauf eingegangen werden[1]).

16·9. Graphische Durchführung des Ritzschen Verfahrens. Das RITZsche Verfahren läßt sich in allen den Fällen, in denen sich nach 13·6 das Verfahren der schrittweisen Näherungen graphisch durchführen läßt, ebenfalls bequem graphisch behandeln. Es sind dies im wesentlichen die Fälle, bei denen die Eigenwertgleichung die Gestalt (13·18) oder (13·19) hat:

(16·34) $$M[y] = (-1)^n \lambda [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$$

und

(16·35) $$(-1)^m [f_m y^{(m)}]^{(m)} = \lambda N[y]\,.$$

Wir beschränken uns bei der folgenden Darstellung auf die Gleichung (16·34): bei der Gleichung (16·35) kann man ganz entsprechend vorgehen. In 13·6 wurde gezeigt, wie man allein durch Integrationen (man vermeidet graphische Differentiationen auf jeden Fall) zwei Funktionen $F_0(x)$, $F_1(x)$ aufstellen kann, die den Bedingungen des Verfahrens der schrittweisen Näherungen genügen, für die also insbesondere gilt:

$$M[F_1] = H(x) = (-1)^n [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}.$$

Will man einen p-gliedrigen RITZschen Ansatz (15·7)

(16·36) $$u = \sum_{r=1}^{p} a_r v_r(x)$$

benutzen, so hat man das Verfahren der schrittweisen Näherungen p-mal (und zwar mit voneinander linear unabhängigen Funktionen) durchzu-

[1]) Beim Knickproblem des geraden Stabes durchgeführt bei J. RATZERSDORFER, Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien 1936, S. 120ff., ferner allgemeine Überlegungen bei E. MARGUERRE, Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938) 57—73, und von demselben Verfasser: DVL-Jahrbuch 1938, S. 252—262.

führen und Funktionen $F_{0(1)}, F_{0(2)}, \ldots, F_{0(p)}, F_{1(1)}, F_{1(2)}, \ldots, F_{1(p)}, H_{(1)}, H_{(2)}, \ldots, H_{(p)}$ aufzustellen, die miteinander durch

$$M[F_{1(r)}] = H_{(r)} = (-1)^n [g_n(x) F_{0(r)}^{(n)}]^{(n)} \quad (r = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind und die erforderlichen Randbedingungen erfüllen. Das ist nach dem oben Gesagten durch graphische Integrationen möglich.

Nun verwendet man die Funktionen $F_{1(r)}$ als die Ausgangsfunktionen $v_r(x)$ im RITZschen Ansatz (16·36), bestimmt durch zeichnerisch oder rechnerisch ausgeführte Quadraturen die Größen (15·9)

$$(16{\cdot}37) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_{rs} &= \int_a^b v_r H_{(s)}\, dx \\ n_{rs} &= \int_a^b (-1)^n v_r [g_n(x) v_{(s)}^{(n)}]^{(n)}\, dx \end{aligned} \right\} \quad (1 \leq r,\, s \leq p)$$

und hat in (15·15) die Bestimmungsgleichung für die RITZschen Näherungswerte Λ. In der zweiten Gleichung (16·37) treten die Differentiationen bei $[g_n v_{(s)}^{(n)}]^{(n)}$ nur scheinbar auf, denn in 13·6 wurde beschrieben, wie man, von der höchsten vorkommenden Ableitung $F_{1(s)}^{(2m)}$ ausgehend, alle niedrigeren Ableitungen $F_{1(s)}^{(\nu)}$ mit $\nu < 2m$ durch Integrationen findet; der Ausdruck $[g_n v_s^{(n)}]^{(n)}$ läßt sich also aus den bereits vorhandenen $F_{1(s)}^{(\nu)}$ ohne Ausführung von Differentiationen finden. Ein Beispiel wird in 16·10 gegeben.

16·10. Graphische Aufstellung der Grammelschen Gleichungen. In 13·7 wurde gezeigt, daß man bei dem Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Aufstellung oberer Schranken μ_1 und μ_2 und einer unteren Schranke für den ersten Eigenwert λ_1 in vielen Fällen mit etwa der halben Arbeit die Schranke μ_1 aufstellen kann, deren Genauigkeit bei technischen Aufgaben oft ausreicht, besonders wenn die Ausgangsfunktionen gut geschätzt sind.

Dieser Tatsache entspricht es, daß man in diesen Fällen bei Durchführung des RITZschen Verfahrens ebenfalls mit im wesentlichen der halben Arbeit (jedenfalls was die Aufstellung der RITZschen Gleichungen betrifft) auskommen kann, indem man wie in 15·1 nicht μ_2, sondern μ_1 zum Minimum macht. Man erhält dann die GRAMMELschen Gleichungen (15·30).

Wir erläutern dies wie in 13·7 an dem Beispiel der Biegeschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes (mit denselben Bezeichnungen wie bei 13·7)

$$M[y] = (\alpha y'')'' = \lambda \varrho F y = \lambda g_0 y;$$
$$y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0 .$$

Ausgehend von p voneinander linear unabhängigen Funktionen $F_{0(r)}$ für $r = 1, 2, \ldots p$, welche die wesentlichen Randbedingungen

$$F_{0(r)} = F'_{0(r)} = 0 \text{ für } x = 0 \cdot$$

erfüllen, bestimmt man durch Zeichnen von p Seilecken die Funktionen $G_{(r)}$ aus

$$G''_{(r)} = \varrho F F_{0(r)}, \quad G_{(r)} = G'_{(r)} = 0 \text{ für } x = l.$$

Für die GALERKINschen Gleichungen (15·14) hat man nochmals p Seilecke zu zeichnen und die Funktionen $F_{1(r)}$ aus

$$F''_{1(r)} = \frac{1}{\alpha(x)} G_{(r)}, \quad F_{1(r)} = F'_{1(r)} = 0 \text{ für } x = 0$$

zu bestimmen. Für die GRAMMELschen Gleichungen (15·30) hat man jedoch nur die ersten p Seilecke nötig und braucht die Funktionen $F_{1(r)}$ nicht, denn die Größen $m^{\square}_{rs}$ und $n^{\square}_{rs}$ lassen sich bereits durch $F_{0(r)}$ und $G_{(r)}$ ausdrücken. Es ist, wenn man $v_r(x) = F_{1(r)}$ setzt, nach (15·28) und (15·29)

$$m^{\square}_{rs} = \int_0^l \varrho F F_{0(r)} F_{0(s)} \, dx$$

$$n^{\square}_{rs} = \int_0^l F_{1(r)} M[F_{1(s)}] \, dx = \int_0^l F_{1(r)} (G_{(s)})'' \, dx = \int_0^l F''_{1(r)} G_{(s)} \, dx =$$

$$= \int_0^l \frac{1}{\alpha} G_{(r)} G_{(s)} \, dx .$$

Man kann also ohne weiteres die GRAMMELschen Gleichungen (15·30) aufstellen.

Unterzieht man sich noch der Mühe, auch die Funktionen $F_{1(r)}$ durch p weitere Seilecke zu bestimmen, so kann man nach (15·9) die Größen

$$m_{rs} = \int_0^l \varrho F v_r F_{0(s)} \, dx = n^{\square}_{rs} ,$$

$$n_{rs} = \int_0^l \varrho F v_r v_s \, dx$$

bestimmen und erhält durch Auflösen der GALERKINschen Determinante (15·15) im allgemeinen genauere Werte als beim Rechnen nach (15·30).

Beispiel: Es werde dasselbe Beispiel wie in 13·7 zugrunde gelegt (vgl. Abb. 13·8), also die Biegeschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes veränderlicher Biegesteifigkeit mit der dimensionslos geschriebenen Differentialgleichung (13·25)

$$(\alpha^* y'')'' = \lambda^* F^* y .$$

Die Funktionen α^*, F^* sind in Abb. 16·6 von Abb. 13·8 übernommen, ferner werden die Funktionen $F_0(\xi)$, $G(\xi)$ und $F_1(\xi)$ von Abb. 13·8 jetzt als Funktionen $F_{0(1)}$, $G_{(1)}$ und $F_{1(1)}$ verwendet. Nun soll ein zweigliedriger RITZ-Ansatz durchgeführt werden; dazu hat man die graphische Integration nochmals mit einer anderen Funktion $F_{0(2)}$ vorzunehmen. $F_{0(2)}$ soll von $F_{0(1)}$ linear unabhängig sein und ist in Abb. 16·6 willkürlich angenommen, etwa so, wie man sich die Form der ersten Oberschwingung vorstellen wird. Es ist durchaus nicht nötig, daß $F_{0(2)}$ die Form dieser Oberschwingung wiedergibt; in der Tat zeigt die Durchführung der Zeichnung, daß $F_{0(2)}$ eine

merkliche Komponente in Richtung der ersten Eigenfunktion (der Grundschwingungsform) hat; denn die mit $F_{0\,(2)}$ konstruierte Funktion $F_{1\,(2)}$ hat sich in ihrer Form der Grundschwingungsform sehr genähert, insbesondere hat $F_{1\,(2)}$ keine Nullstelle mehr im Intervall $0 < \xi < 1$.

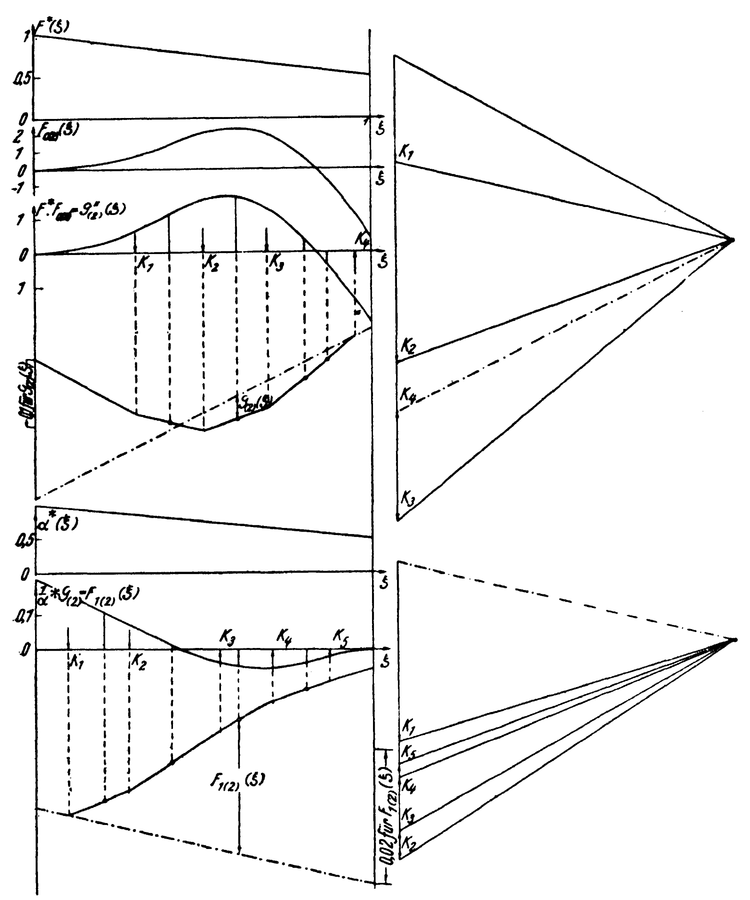


Abb. 16·6. Beispiel zur graphischen Durchführung des RITZschen Verfahrens.

Ein erstes Seileck liefert die Funktion $G_{(2)}(\xi)$; es gilt über das Seileck und die Maßstäbe dasselbe, was bereits bei dem Beispiel in 13·7 gesagt wurde. Nun können die GRAMMELschen Gleichungen aufgestellt werden. Von 13·7 werden die Größen übernommen

$$m_{1\,1}^{\square} = a_0 = 1{,}337, \quad n_{1\,1}^{\square} = a_1 = 0{,}0620\,.$$

Neu auszuwerten sind die Integrale (hier mit Hilfe der SIMPSONschen Regel berechnet)

$$m_{12}^{\square} = \int_0^1 F^* F_{0(1)} F_{0(2)} d\xi = -0{,}174, \quad m_{22}^{\square} = \int_0^1 F^* F_{0(2)}^2 d\xi = 1{,}678,$$

$$n_{12}^{\square} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha^*} G_{(1)} G_{(2)} d\xi = 0{,}0151, \quad n_{22}^{\square} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha^*} G_{(2)}^2 d\xi = 0{,}00642.$$

Die GRAMMELschen Gleichungen ergeben dann

$$0 = \begin{vmatrix} 1{,}337 - 0{,}0620\,\Lambda, & -0{,}174 - 0{,}0151\,\Lambda \\ -0{,}174 - 0{,}0151\,\Lambda, & 1{,}678 - 0{,}00642\,\Lambda \end{vmatrix}$$

und daraus

$$\Lambda = \begin{cases} 19{,}3, \\ 674. \end{cases}$$

Nun werde $G_{(2)}$ mit Hilfe eines zweiten Seileckes zu $F_{1(2)}$ integriert; dann lassen sich die GALERKINschen Gleichungen (15·15) aufstellen. Man hat dazu außer den bereits bekannten Größen $m_{rs} = n_{rs}^{\square}$ $(r, s = 1, 2)$ und $n_{11} = a_2 = 0{,}00322$ neu die Integrale auszuwerten:

$$n_{12} = \int_0^1 F^* F_{1(1)} F_{1(2)} d\xi = 0{,}000824,$$

$$n_{22} = \int_0^1 F^* F_{1(2)}^2 d\xi = 0{,}000216.$$

Dann ergeben die Gleichungen (15·15)

$$0 = \begin{vmatrix} 0{,}0620 - 0{,}00322\,\Lambda, & 0{,}0151 - 0{,}000824\,\Lambda \\ 0{,}0151 - 0{,}000824\,\Lambda, & 0{,}00642 - 0{,}000216\,\Lambda \end{vmatrix}$$

und damit die Werte

$$\Lambda = \begin{cases} 19{,}2, \\ 535. \end{cases}$$

16·11. Vermischte Übungsaufgaben zum 5. Kapitel. 1. Man berechne angenähert die Eigenfrequenzen ω der Grundschwingung und der ersten Oberschwingung für die Biegeschwingungen des in der Aufgabe 6 von 3·4 genannten Rahmens oder des Trägers in Abb. 16·7. Wie in 3·4 wird die Abkürzung

$$k = l_1 \sqrt[4]{\frac{\mu}{\alpha} \omega^2}$$

eingeführt. Dann ist

$$k^4 = \operatorname{Min} \frac{\int_0^3 u''^2 dx}{\int_0^3 u^2 dx},$$

Abb. 16·7. Biegeschwingung eines statisch unbestimmt gelagerten Trägers.

wo u den Bereich der zulässigen Funktionen durchläuft, d. h. u erfüllt die Randbedingungen (Abb. 16·7):

$$u(0) = u(2) = u(3) = u'(3) = 0, \quad u'(2) \text{ stetig}.$$

Durchrechnung: Als zwei zulässige Funktionen findet man z. B.

$$v_1 = \sin\frac{x\pi}{6} - 2\sin\frac{2x\pi}{6} + \sin\frac{3x\pi}{6} - \sin\frac{4x\pi}{6},$$

$$v_2 = \sin\frac{x\pi}{6} + 2\sin\frac{3x\pi}{6} + \sin\frac{5x\pi}{6}.$$

Mit

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2; \quad \left(\frac{6k}{\pi}\right)^4 = \mu; \quad \frac{512}{315\pi} = \sigma$$

und

$$\int_0^3 \sin\frac{k\pi x}{6}\sin\frac{l\pi x}{6}\,dx = \begin{cases} 0 \text{ für } k-l \text{ gerade, } k \neq l, \\ \frac{3}{2} \text{ für } k = l, \\ \frac{3}{\pi}\left[\frac{(-1)^{\frac{k-l-1}{2}}}{k-l} - \frac{(-1)^{\frac{k+l-1}{2}}}{k+l}\right] \\ \qquad \text{für } k-l \text{ ungerade} \end{cases}$$

lautet (15·15)

$$\begin{vmatrix} 402 - 552\sigma - \mu(7 - 12\sigma), & 163 - 940\sigma - \mu(3 - 10\sigma) \\ 163 - 940\sigma - \mu(3 - 10\sigma), & 950 - 6\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Man erhält

$$\mu = \begin{cases} 146{,}74, \\ 1775 \end{cases}$$

und

$$k = \begin{cases} 1{,}8224 & \text{(Fehler } + 0{,}7\%) \\ 3{,}399 & \text{(Fehler } + 3\%). \end{cases}$$

2. Man führe für das am Schluß von 15·1 genannte Beispiel

$$-y'' = \lambda y; \qquad y'(0) = y(1) = 0$$

einen zweigliedrigen RITZ-Ansatz

$$u = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x)$$

mit den Vergleichsfunktionen $v_1 = 1 - x^2$, $v_2 = 1 - x^3$ durch.

Ergebnis: Die Determinante (15·15) lautet hier

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} - \frac{8}{15}\Lambda & \frac{3}{2} - \frac{7}{12}\Lambda \\ \frac{3}{2} - \frac{7}{12}\Lambda & \frac{9}{5} - \frac{9}{14}\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

und liefert

$$\Lambda = \frac{6}{65}\left(141 \pm \sqrt{13056}\right) = \begin{cases} 2{,}46803 & \text{(Fehler } + 0{,}03\%), \\ 23{,}563 & \text{(Fehler } + 6\%). \end{cases}$$

3. Für den im zweiten Beispiel von 12·6 behandelten eingespannt-gelenkig gelagerten Knickstab veränderlicher Biegesteifigkeit (Abb. 12·3, S. 188)

$$[(2 - x)y'']'' = -\lambda y''; \qquad y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0$$

berechne man für einige zulässige Funktionen die RAYLEIGHschen Quotienten und führe einen zweigliedrigen RITZ-Ansatz durch.

Ergebnis: Der Quotient nach (15·2)

$$K[u] = \frac{Z^*}{N^*} = \frac{\int\limits_0^1 (2-x)\, u''^2\, dx}{\int\limits_0^1 u'^2\, dx}$$

ist in folgender Tafel für einige Funktionen u angegeben:

u	Erfüllt an Rand-bedingungen	Zähler Z^*	Nenner N^*	$K[u]$
$x^2 - x^3$	nur die wesentlichen	5	$\frac{2}{15}$	$\frac{75}{2} = 37{,}5$ (Fehler + 28%)
$3x^2 - 5x^3 + 2x^4$	alle	$\frac{57}{5}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{133}{4} = 33{,}25$ (Fehler + 13%)
$\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x$	alle	$\pi^2 \cdot \left(\frac{15\pi^2}{4} - \frac{32}{9}\right)$	π^2	$\frac{15}{4}\pi^2 - \frac{32}{9} = 33{,}45$ (Fehler + 14%)

Der Ritz-Ansatz $u(x) = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x)$ mit den nur die wesentlichen Randbedingungen erfüllenden Funktionen

$$v_1(x) = x^2 - x^3, \quad v_2(x) = x^3 - x^4$$

führt nach (15·27) auf

$$\begin{vmatrix} 5 - \frac{2}{15}\Lambda & \frac{23}{5} - \frac{1}{10}\Lambda \\ \frac{23}{5} - \frac{1}{10}\Lambda & \frac{27}{5} - \frac{3}{35}\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\Lambda = 80 \pm 2\sqrt{578} = \begin{cases} 31{,}917 & \text{(Fehler + 8\%)}, \\ 128{,}08. \end{cases}$$

Die hier benutzten Ansätze sind noch sehr grob und daher die Ergebnisse ungenauer als in 12·6.

4. Für das in Aufgabe 4 von 14·6 genannte Problem (vgl. Abb. 14·1, S. 218)

$$-y'' = \lambda(2 + \cos x)\,y; \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

führe man den zweigliedrigen Ritz-Ansatz

$$u = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x$$

durch.

Ergebnis: Die Determinante (15·15) lautet hier

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \Lambda & -\frac{1}{4}\Lambda \\ -\frac{1}{4}\Lambda & 2 - \Lambda \end{vmatrix} = 0;$$

das ergibt

$$\Lambda = \frac{4}{3}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \begin{cases} 0{,}490059, \\ 2{,}17660. \end{cases}$$

5. Für das Eigenwertproblem

$$-y'' = \lambda y, \quad y(-1) = y(1) = 0$$

führe man einen RITZ-Ansatz

$$u = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu (1 - x^{2\nu})$$

für die symmetrischen Schwingungsformen durch.

Ergebnis: Für $p = 1$ erhält man mit $u = 1 - x^2$ den RAYLEIGHschen Quotienten

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{5}{2} = 2{,}5\,.$$

Für $p = 2$ lauten die RITZschen Näherungswerte

$$\lambda_{1,3}^{(2)} = 14 \pm \sqrt{133} = \begin{cases} 2{,}4674374 \\ 25{,}53256 \end{cases}$$

an Stelle der exakten Werte

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2{,}46740110\,,$$

$$\lambda_3 = \frac{9\pi^2}{4} = 22{,}206610\,.$$

Bei einem dreigliedrigen Ansatz ($p = 3$) erhält man mit $\lambda = \frac{5-\mu}{2}$ für μ die kubische Gleichung

$$\mu^3 + 210\,\mu^2 + 6735\,\mu = 440$$

und für λ_1 den außerordentlich guten Wert

$$\lambda_1^{(3)} = 2{,}467401108747\,.$$

6. Man rechne den RITZ-Ansatz $u = a_1 x^2 + a_2 x^3$ für das Problem

$$y^{IV} = \lambda y; \qquad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$$

durch.

Ergebnis: Die Wurzeln Λ von

$$\begin{vmatrix} 4 - \frac{1}{5}\Lambda & 6 - \frac{1}{6}\Lambda \\ 6 - \frac{1}{6}\Lambda & 12 - \frac{1}{7}\Lambda \end{vmatrix} = 12 - \frac{34}{35}\Lambda + \frac{\Lambda^2}{1260} = 0$$

lauten

$$\Lambda = \begin{cases} 12{,}4802 \text{ (Fehler } + 1\,\%) \\ 1211{,}52\,. \end{cases}$$

7. Für den in Aufgabe 5 von 11·4 und Aufgabe 5 von 14·6 behandelten Druckstab:

$$y^{IV} + 20y = -\lambda y'', \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

führe man den alle Randbedingungen erfüllenden RITZ-Ansatz

$$u = a_1(5 - 6x^2 + x^4) + a_2(9x^2 - 14x^4 + 5x^6)$$

durch.

Für den Näherungswert Λ erhält man mit der Abkürzung $\mu = \frac{3}{2}\Lambda$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 8899 - 561\,\mu & 2014 - 121\,\mu \\ 2014 - 121\,\mu & \frac{7}{13}\cdot 17911 - 281\,\mu \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$\Lambda = \begin{cases} 10{,}5730968 & \text{(Fehler } < +0{,}00001\,\%)\,, \\ 24{,}036371 & \text{(Fehler } +0{,}4\,\%)\,. \end{cases}$$

Hätte man nur mit a_1 gerechnet, so ergäbe sich als RAYLEIGHscher Quotient

$$\Lambda = \frac{1618}{153} = 10{,}575\,16 \quad (\text{Fehler} + 0{,}02\,\%)\,.$$

8. Für die Aufgabe

$$y^{IV} + A[(l-x)y']' = \lambda y\,, \qquad y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0$$

führe man den RITZ-Ansatz $u = a_1 x^2 + a_2 x^3$ durch und vergleiche für $A = 2$, $l = 1$ die Werte mit denen der Aufgabe 7 von 14·6.

Ergebnis: Die Nullstellen der Determinante

$$0 = \begin{vmatrix} 4 - \frac{A}{3} l^3 + \frac{1}{5} \Lambda l^4, & 6 - \frac{3}{10} A l^3 + \frac{1}{6} \Lambda l^4 \\ 6 - \frac{3}{10} A l^3 + \frac{1}{6} \Lambda l^4, & 12 - \frac{3}{10} A l^3 + \frac{1}{7} \Lambda l^4 \end{vmatrix}$$

ergeben mit der Abkürzung $C = \frac{1}{10} A l^3$ die RITZschen Näherungswerte

$$\Lambda = \frac{6}{l^4}\left(8C - 102 \pm \sqrt{9984 - 1072C + 29C^2}\right).$$

Für $A = 2$, $l = 1$ erhält man

$$\Lambda = \begin{cases} 9{,}31706, \\ 1195{,}5. \end{cases}$$

9. Führe für das Problem

$$y^{IV} = \lambda y, \; y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$$

den nichtlinearen, die wesentlichen Randbedingungen erfüllenden RITZ-Ansatz

$$u = 1 - \cos a x$$

durch.

Ergebnis: Es wird

$$R[u] = \frac{\int_0^1 u''^2\,dx}{\int_0^1 u^2\,dx} = \frac{a^4(2a + \sin 2a)}{6a - 8\sin a + \sin 2a}\,.$$

Setzt man hier für a mehrere Werte, etwa $a = 1, 2, 3$ ein, so ergibt sich bei Interpolation der Kleinstwert von R für $a \approx 1{,}85$ zu $R = 12{,}89$ (Fehler $+ 4\,\%$).

6. Kapitel.

Das Differenzenverfahren.

§ 17. Das Differenzenverfahren erster Annäherung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Das Differenzenverfahren verwendet das Prinzip, alle Differentialquotienten durch Differenzenquotienten zu ersetzen, und ist bei beliebigen Differentialgleichungsproblemen, nicht nur bei Eigenwertproblemen, anwendbar. In 17·1 wird daher das Verfahren zunächst ganz allgemein, unabhängig von Eigenwertproblemen dargestellt.

17·1. Beschreibung des Differenzenverfahrens. Man teilt das Intervall (a, b), in dem die Lösung $y(x)$ eines Differentialgleichungsproblems gesucht wird, in n gleiche Teile der Länge h:

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

h heißt die „Schrittweite" oder „Maschenweite". So erhält man die Teilpunkte $x_i = a + ih$. Den Wert einer Funktion an einer dieser Teilabszissen bezeichnen wir durch Anhängen eines Index; so soll y_i den Wert der gesuchten Funktion $y(x)$ an der Stelle x_i (Abb. 17·1) und Y_i eine Näherung für den Wert y_i bedeuten.

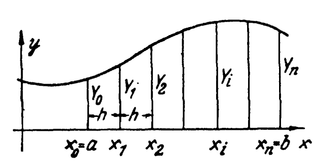


Abb. 17·1. Zum Differenzenverfahren.

Das Differenzenverfahren stellt nun eine Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die Näherungswerte Y_i auf, und zwar derart, daß die Differentialgleichung für die Stellen $x = x_i$ angeschrieben wird und in ihr alle Differentialquotienten in bestimmter Weise durch Differenzenquotienten und damit durch gewisse Ausdrücke in den Y_i ersetzt werden.

Man ersetzt z. B. die Ableitung $y'(x_i)$ durch

$$\text{(17·1)} \qquad \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h}.$$

und die zweite Ableitung $y''(x_i)$ durch

$$\text{(17·2)} \qquad \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2}.$$

Nun führen wir den Operator Δ für eine beliebige Funktion $f(x)$ ein durch die Vorschrift

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

und den Operator Δ^k durch

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$
$$(\text{mit } \Delta^0 f(x) = f(x)).$$

So ist z. B.

$$\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i, \quad \Delta^2 Y_i = Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + Y_i, \quad \Delta Y_{i-1} = Y_i - Y_{i-1},$$
$$\Delta Y_i + \Delta Y_{i-1} = Y_{i+1} - Y_{i-1}.$$

Dann kann man folgende allgemeine Ersetzungsvorschrift angeben: Eine Ableitung $y^{(k)}(x_i)$ gerader Ordnung k wird ersetzt durch den k-ten Differenzenquotienten

$$\text{(17·3)} \qquad \frac{1}{h^k} \Delta^k Y_{i-\frac{k}{2}},$$

eine Ableitung $y^{(p)}(x)$ ungerader Ordnung p wird ersetzt durch das arithmische Mittel zweier p-ter Differenzenquotienten

$$\frac{1}{2}\frac{1}{h^p}\left(\Delta^p Y_{i-\frac{p+1}{2}} + \Delta^p Y_{i-\frac{p-1}{2}}\right). \tag{17·4}$$

Auf diese Weise kann der für die Stelle $x = x_i$ angeschriebenen Differentialgleichung eine sogenannte „finite Gleichung", d. h. eine Gleichung für die endlich vielen auszurechnenden Y-Werte gegenübergestellt werden. Auch den Anfangs- oder Randbedingungen werden finite Gleichungen gegenübergestellt. Hat man z. B. ein Randwertproblem von der geraden Ordnung k mit k Randbedingungen an den Randstellen $x = a$ und $x = b$, so stellt man für jeden der Teilpunkte x_i (für $i = 0, 1, \ldots, n$) eine finite Gleichung auf, und jeder Randbedingung entspricht ebenfalls eine finite Gleichung. Man erhält so $n + k + 1$ Gleichungen für ebenso viele Unbekannte

$$Y_{-\frac{k}{2}},\ Y_{-\frac{k}{2}+1},\ \ldots,\ Y_{n+\frac{k}{2}}.$$

Diese Bestimmungsgleichungen sind linear, wenn die Differentialgleichung und die Randbedingungen linear sind, andernfalls hat man ein nichtlineares Gleichungssystem. Über die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems läßt sich in der Allgemeinheit, in der hier das Verfahren beschrieben wird, natürlich nichts aussagen.

Zusatz: Man kann oft auch noch andere Ersetzungsvorschriften geben und so verschiedene finite Gleichungen aufstellen; z. B. bei $(fy')'_{x=x_i}$ kann man ausdifferenzieren und die hier gegebene Ersetzungsvorschrift für jede Ableitung $y(x)$ einzeln benutzen; dann erhält man den Ausdruck

$$f_i' \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} + f_i \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2};$$

oder man kann bei jeder der beiden Differentiationen die Differenzenbildung nach (17·1) vornehmen und erhält den Ausdruck

$$\frac{f_{i+1}\dfrac{Y_{i+2} - Y_i}{2h} - f_{i-1}\dfrac{Y_i - Y_{i-2}}{2h}}{2h}.$$

Ein dritter Ausdruck findet sich in (17·8). Die auf verschiedene Arten aufstellbaren Gleichungen werden im allgemeinen voneinander abweichen und auch sich etwas unterscheidende Ergebnisse liefern (vgl. hierzu Aufg. 7 in 19·6).

17·2. Ein Beispiel bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Als Beispiel betrachten wir einen beiderseits gelenkig gelagerten abgesetzten Knickstab, dessen Biegesteifigkeit auf der rechten Stabhälfte gleich J, auf

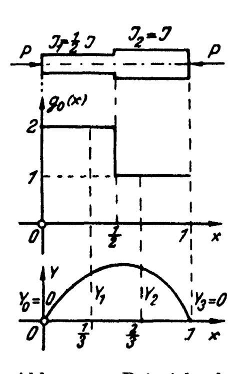


Abb. 17·2. Beispiel, abgesetzter Knickstab.

der linken gleich $\frac{1}{2} J$ ist. Die Knickgleichung

$$-y'' = \frac{P}{EJ(x)} y$$

läßt sich bei Einführung dimensionsloser Größen auf das Eigenwertproblem zurückführen:

$$(17{\cdot}5) \qquad \begin{cases} -y'' = \lambda g_0 y, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

wobei $g_0(x)$ die in Abb. 17·2 gegebene Funktion ist:

$$(17{\cdot}6) \qquad g_0 = \begin{cases} 2 \text{ für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 \text{ für } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Die Knicklast ist dann

$$P = \lambda_1 \frac{EJ}{l^2},$$

wobei der jetzt zu berechnende Eigenwert λ_1 an die Stelle des aus der EULERschen Formel bekannten Faktors π^2 tritt.

Rechnung mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$: Hier haben wir die unbekannten Funktionswerte Y_1, Y_2, während wegen der Randbedingungen $Y_0 = Y_3 = 0$ ist (Abb. 17·2).

Der für die Stelle $x = x_i$ angeschriebenen Differentialgleichung entspricht jetzt die Differenzengleichung

$$-\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2} = \Lambda g_0(x_i) \cdot Y_i .$$

Für λ ist der Näherungswert Λ geschrieben; mit der Abkürzung

$$\Lambda h^2 = \mu$$

geht die Gleichung über in

$$Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1} + \mu g_0(x_i) Y_i = 0 .$$

Schreibt man dies für $i = 1$ und $i = 2$ an, so erhält man bei Berücksichtigung der Randbedingungen zwei lineare, homogene Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y_2 - 2Y_1 + \mu \cdot 2Y_1 &= 0, \\ -2Y_2 + Y_1 + \mu \cdot 1 Y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Sie haben genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} -2 + 2\mu & 1 \\ 1 & -2 + \mu \end{vmatrix} = 2\mu^2 - 6\mu + 3 = 0 .$$

Daraus folgt $\mu = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder

$$\Lambda = \frac{9}{2}\left(3 \pm \sqrt{3}\right) = \begin{cases} 5{,}7058 & \text{(Fehler } - 11\%\text{)}, \\ 21{,}294 & \text{(Fehler } - 25\%\text{)}. \end{cases}$$

Um genauere Werte zu erhalten, wiederholen wir die Rechnung mit kleinerer Schrittweite und setzen $h = \frac{1}{5}$ (Abb. 17·3). Hier lauten, wieder mit der Abkürzung $\Lambda h^2 = \mu$, die Randbedingungen $Y_0 = Y_5 = 0$ und daher die Differenzengleichungen:

$$\begin{aligned} Y_2 - 2\,Y_1 \qquad\quad + 2\,\mu\,Y_1 &= 0, \\ Y_3 - 2\,Y_2 + Y_1 + 2\,\mu\,Y_2 &= 0, \\ Y_4 - 2\,Y_3 + Y_2 + 1\cdot\mu\,Y_3 &= 0, \\ -2\,Y_4 + Y_3 + 1\cdot\mu\,Y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Abb. 17·3. Rechnung mit kleinerer Schrittweite.

Man könnte auch hier wieder die Determinante aufstellen, praktischer ist es jedoch, aus den Gleichungen nacheinander Y_2, Y_3, Y_4 durch Y_1 auszudrücken. Die letzte Gleichung liefert dann die gesuchte algebraische Gleichung für Λ.

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1(2 - 2\mu), \\ Y_3 &= Y_1(4\mu^2 - 8\mu + 3), \\ Y_4 &= Y_1(-4\mu^3 + 16\mu^2 - 17\mu + 4), \\ Y_1(4\mu^4 &- 24\mu^3 + 45\mu^2 - 30\mu + 5) = 0. \end{aligned}$$

Die Wurzeln μ dieser Gleichung vierten Grades sind

$$\mu_1 = 0{,}24605; \quad \mu_2 = 1; \quad \mu_3 = 1{,}62218; \quad \mu_4 = 3{,}13177,$$

und daraus findet man mit $\Lambda = 25\,\mu$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 6{,}1513 \text{ (Fehler } - 4\%\text{)} & \Lambda_3 &= 40{,}55 \text{ (Fehler } -31\%\text{)} \\ \Lambda_2 &= 25 \quad\;\; \text{(Fehler } -12\%\text{)} & \Lambda_4 &= 78{,}29 \text{ (Fehler } -30\%\text{)}. \end{aligned}$$

Die Wurzeln sind stets reell, da die gleich Null gesetzte Determinante auf eine Säkulargleichung zurückführbar ist.

Die exakten Werte sind hier mit $\lambda = 4z^2$ durch die transzendente Gleichung gegeben:

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,z + \mathrm{tg}\left(z\sqrt{2}\right) = 0\,.$$

Die ersten vier Wurzeln sind

$$\begin{aligned} z_1 &= 1{,}2657 & z_3 &= 3{,}833 \\ z_2 &= 2{,}6663 & z_4 &= 5{,}263 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6{,}4075 & \lambda_3 &= 58{,}78 \\ \lambda_2 &= 28{,}437 & \lambda_4 &= 110{,}8\,. \end{aligned}$$

17·3. Beispiel einer Differentialgleichung vierter Ordnung. Bei Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung muß man auch Funktionswerte Y_i benutzen, die über den Rand hinausgehen, wie schon in 17·1 angedeutet wurde. Diese Y_i müssen mittels der gegebenen Randbedingungen eliminiert werden.

Wir nehmen als Beispiel den schon in 12·6 behandelten Knickstab mit der Differentialgleichung

$$[(2-x)y'']'' = -\lambda y''$$

und den Randbedingungen $y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0$. Die Randbedingungen entsprechen bei der Maschenweite $h = \frac{1}{n}$ in folgender Weise den Bedingungen für die Y_i (vgl. Abb. 17·4):

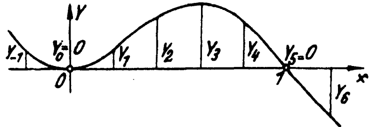


Abb. 17·4. Differenzenverfahren bei einem eingespannt-gelenkig gelagerten Knickstab.

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & Y_0 &= 0 \\ y'(0) &= 0 & Y_1 &= Y_{-1} \\ y(1) &= 0 & Y_n &= 0 \\ y''(1) &= 0 & Y_{n+1} &= -Y_{n-1}. \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung entsteht aus $Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1} = 0$.

Nun wird der Differentialgleichung eine Differenzengleichung gegenübergestellt. Dazu kann man entweder die Differentialgleichung ausdifferenzieren und y'', y''', y^{IV} einzeln durch ihre Differenzenquotienten ersetzen, oder man geht hier praktischer auf folgende Weise vor, die der Anschaulichkeit halber bei der Maschenweite $h = \frac{1}{5}$ beschrieben sei. Beim Differenzenverfahren entsprechen den einzelnen Ausdrücken $y, y'', \ldots$ die Werte:

Stelle x	Funktionswert y	$h^2 y''$	$2-x$	$5h^2(2-x)y''$
$-\frac{1}{5}$	Y_1			
0	0	$2Y_1$	$\frac{10}{5}$	$20Y_1$
$\frac{1}{5}$	Y_1	$Y_2 - 2Y_1 = \alpha$	$\frac{9}{5}$	$9Y_2 - 18Y_1$
$\frac{2}{5}$	Y_2	$Y_3 - 2Y_2 + Y_1 = \beta$	$\frac{8}{5}$	$8Y_3 - 16Y_2 + 8Y_1$
$\frac{3}{5}$	Y_3	$Y_4 - 2Y_3 + Y_2 = \gamma$	$\frac{7}{5}$	$7Y_4 - 14Y_3 + 7Y_2$
$\frac{4}{5}$	Y_4	$-2Y_4 + Y_3 = \delta$	$\frac{6}{5}$	$-12Y_4 + 6Y_3$
1	0	0	$\frac{5}{5}$	0
$\frac{6}{5}$	$-Y_4$			

Der Differentialgleichung $[(2-x)y'']'' = -\lambda y''$ entspricht dann an der Stelle $x = \frac{1}{5}$ die Differenzengleichung

$$(20Y_1) - 2(9Y_2 - 18Y_1) + (8Y_3 - 16Y_2 + 8Y_1) = \mu \cdot (Y_2 - 2Y_1)$$

mit der Abkürzung $\mu = -5h^2\Lambda$.

So könnte man für die Stellen $x_i = \frac{i}{5}$ (mit $i = 1, 2, 3, 4$) vier Differenzengleichungen aufstellen; etwas bequemer ist es jedoch, nicht die Y_i, sondern die zweiten Differenzen als Unbekannte einzuführen, die zur Abkürzung mit α, β, γ, δ bezeichnet und bereits mit diesen Abkürzungen in das obige Schema eingetragen sind. Nun muß noch Y_1 durch α, β, γ, δ ausgedrückt werden, man findet

$$Y_1 = -\frac{1}{5}(4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta);$$

wir haben also jetzt die folgenden Werte:

Stelle x	$h^2 y''$	$5h^2(2-x)y''$	$h^2[5h^2(2-x)y'']''$
0	$-\frac{2}{5}(4\alpha+3\beta+2\gamma+\delta)$	$-16\alpha-12\beta-8\gamma-4\delta$	
$\frac{1}{5}$	α	9α	$-34\alpha-4\beta-8\gamma-4\delta$
$\frac{2}{5}$	β	8β	$9\alpha-16\beta+7\gamma$
$\frac{3}{5}$	γ	7γ	$8\beta-14\gamma+6\delta$
$\frac{4}{5}$	δ	6δ	$7\gamma-12\delta$
1	0	0	

Nunmehr lauten die Differenzengleichungen mit der neuen Abkürzung $5h^2\Lambda = \varrho + 15$:

$$\begin{aligned}
-19\alpha - 4\beta - 8\gamma - 4\delta &= -\varrho\alpha,\\
9\alpha - \beta + 7\gamma \qquad &= -\varrho\beta,\\
8\beta + \gamma + 6\delta &= -\varrho\gamma,\\
7\gamma + 3\delta &= -\varrho\delta.
\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{vmatrix} -19+\varrho & -4 & -8 & -4 \\ 9 & -1+\varrho & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 1+\varrho & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 3+\varrho \end{vmatrix} = \varrho^4 - 16\varrho^3 - 120\varrho^2 + 1320\varrho + 1335 = 0$$

folgt

$$\varrho = \begin{cases} -9{,}541 \\ -0{,}942 \\ 8{,}073 \\ 18{,}4 \end{cases} \quad \text{und} \quad \Lambda = \begin{cases} 27{,}30 \text{ (Fehler } -7\%) \\ 70{,}29 \\ 115{,}4 \\ 167 \end{cases}$$

17·4. Minimaleigenschaft des kleinsten Differenzen-Eigenwertes. Man kann bei den Differenzengleichungen eine ähnliche Theorie aufstellen wie

bei den Differentialgleichungen; das soll hier der Einfachheit halber an den Eigenwertproblemen zweiter Ordnung

$$(17\cdot7)\qquad \begin{cases} -(fy')' + qy = \lambda g y;\\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

mit $f > 0$, $g > 0$ erläutert werden. Bei der Maschenweite $h = \frac{l}{n}$ entspricht (17·7) das Differenzen-Eigenwertproblem

$$(17\cdot8)\qquad \begin{cases} -\Delta(f_{i-\frac{1}{2}}\Delta Y_{i-1}) + h^2 q_i Y_i = \Lambda h^2 g_i Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),\\ Y_0 = Y_n = 0, \end{cases}$$

wobei $f_{i-\frac{1}{2}} = f\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h\right)$ bedeutet.

Ebenso wie man nach § 8 den kleinsten Eigenwert λ_1 von (17·7) durch ein Minimumproblem festlegen kann, gibt es auch für den kleinsten Eigenwert Λ_1 von (17·8) ein Minimumproblem. Es lautet, wenn der Deutlichkeit halber $\Lambda_1^{(n)}$ für Λ_1 geschrieben wird:

$$(17\cdot9)\qquad \Lambda_1^{(n)} \leq \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{h}\Delta u_i\right)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} q_i u_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} g_i u_i}.$$

Dabei können die u_i irgendwelche reellen, den Randbedingungen $u_0 = u_n = 0$ genügende Zahlen mit $u_i \not\equiv 0$ sein: in (17·9) steht das Gleichheitszeichen, wenn für u_i eine „Differenzeneigenfunktion" Y_i, d. h. eine Lösung von (17·8) eingesetzt wird. Für $n \to \infty$ geht (17·9) in die entsprechende Minimalaussage für den ersten Eigenwert λ_1 von (17·7) über, vgl. (11·7).

Bezeichnet man in dem Bruch (17·9) den Zähler mit Z und den Nenner mit N, so nimmt der Quotient $\frac{Z}{N}$ alle Werte, die er überhaupt annehmen kann, bereits für die Werte u_i an, die der Nebenbedingung $N = 1$ genügen. Nach dem WEIERSTRASSschen Satz, daß eine stetige Funktion in einem abgeschlossenen Bereich ihren Kleinstwert an mindestens einer Stelle des Bereiches annimmt, ist die Lösbarkeit der Minimumaufgabe Z = Minimum für $N = 1$ gesichert. Für die Minimumstellen müssen nach den Regeln der Differentialrechnung die notwendigen Bedingungen erfüllt sein:

$$(17\cdot10)\qquad \frac{\partial(Z - \Lambda N)}{\partial u_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

und diese Gleichungen stimmen mit (17·8) überein.

Durch genaueren Vergleich der Minimalausdrücke für λ_1 und $\Lambda_1^{(n)}$ läßt sich zeigen[1]), daß die $\Lambda_1^{(n)}$ für $n \to \infty$ gegen λ_1 konvergieren und daß der

[1]) L. COLLATZ, Deutsche Mathematik, Bd. II (1937) 189—215, dort sind auch Probleme vierter Ordnung behandelt. Weitere Literatur über die Theorie des

Fehler mit h quadratisch gegen 0 geht[1]):

$$|\lambda_1 - \Lambda_1^{(n)}| \leq \text{const} \cdot h^2 . \tag{17·11}$$

§ 18. Verschärfungen des Differenzenverfahrens.

Bei dem in § 17 beschriebenen „gewöhnlichen" Differenzenverfahren erhält man bei großer Maschenweite h, also geringer Anzahl von Gleichungen und damit relativ kurzer Rechnung, einen für viele Zwecke ausreichenden Überblick über die Größenordnung der Eigenwerte und den Verlauf der Eigenfunktionen. Braucht man jedoch genauere Werte, so könnte man zwar das Verfahren von § 17 mit kleinerer Maschenweite h wiederholen, jedoch muß man dann wegen der langsamen Konvergenz des gewöhnlichen Differenzenverfahrens zu sehr kleinen Werten von h übergehen, und das Anwachsen der Rechenarbeit steht dann nicht mehr im vernünftigen Verhältnis zum erzielten Genauigkeitsgewinn. Es sollen daher hier einige Abwandlungen des gewöhnlichen Differenzenverfahrens beschrieben werden, die genauere Werte liefern.

18·1. Finite Ausdrücke. Die Grundlage für das in 18·2 beschriebene Differenzenverfahren höherer Annäherung bilden die „finiten" Ausdrücke; diese stellen Linearkombinationen aus Funktionswerten $y_{i+\nu}$ dar, die mit einer vorgegebenen Ableitung $y^{(k)}$, genommen an der Stelle x_i, näherungsweise, und zwar möglichst gut, übereinstimmen. So sind z. B. bei kleiner Maschenweite h die folgenden Ausdrücke im allgemeinen bessere Annäherungen an die erste und zweite Ableitung $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ als die in § 17 verwendeten Differenzenquotienten (17·1), (17·2):

$$y_i' \approx \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12h} \tag{18·1}$$

$$y_i'' \approx \frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12h^2} \tag{18·2}$$

Differenzenverfahrens: M. Plancherel, Le passage à la limite des équations aux différences aux équations differentielles dans les problèmes aux limites, Bull. Sci. math. (2) 47 (1923) 153—160, 170—177. R. Courant, Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über eine Klasse von Funktionalgleichungen, Acta math. 49 (1926) 1—68. H. Levy und E. Baggott, Characteristic numbers, functions and orthogonal properties of difference equations, Philos. Mag., London, (7) 18 (1934) 177—187.

[1]) Hierauf beruht eine von Herrn H. Bückner vorgeschlagene Verbesserung des Differenzenverfahrens, die demnächst veröffentlicht wird.

Als verbesserte Näherungswerte $\Lambda_1^{*(n)}$ werden die Zahlen

$$\Lambda_1^{*(n)} = \Lambda_1^{(n)} + C \cdot h^2$$

verwendet, wobei C eine leicht berechenbare Konstante ist.

Man erhält diese Ausdrücke leicht mit Hilfe der TAYLORschen Formel: Setzt man z. B. mit noch zu bestimmenden Konstanten c_ϱ an

$$y_i'' \approx \sum_{\varrho=-2}^{+2} c_\varrho y_{i+\varrho},$$

so kann man jedes einzelne Glied dieser Summe nach dem TAYLORschen Satz entwickeln:

$$y_{i+\varrho} = y_i + \varrho h y_i' + \frac{\varrho^2 h^2}{2!} y_i'' + \cdots$$

So erhält man

$$y_i'' \approx y_i \sum_{\varrho=-2}^{2} c_\varrho + h y_i' \sum_{\varrho=-2}^{2} \varrho c_\varrho + \frac{h^2}{2!} y_i'' \sum_{\varrho=-2}^{2} \varrho^2 c_\varrho + \frac{h^3}{3!} y_i''' \sum_{\varrho=-2}^{2} \varrho^3 c_\varrho + \cdots$$

Verlangt man, daß der rechtsstehende Ausdruck, abgesehen von Gliedern mit h^5 und höheren Potenzen von h, mit y_i'' übereinstimmen soll, so erhält man in

$$\sum_{\varrho=-2}^{2} c_\varrho = \sum_{\varrho=-2}^{2} \varrho c_\varrho = \sum_{\varrho=-2}^{2} \varrho^3 c_\varrho = \sum_{\varrho=-2}^{2} \varrho^4 c_\varrho = 0; \quad \sum_{\varrho=-2}^{2} \varrho^2 c_\varrho = \frac{2}{h^2}$$

fünf lineare Bestimmungsgleichungen für die fünf unbekannten Beiwerte c_ϱ. Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt den in (18·2) rechtsstehenden finiten Ausdruck.

Die bei diesem Beispiel verwendete Methode läßt sich ohne weiteres verallgemeinern. Zunächst geben wir die

Definition: *Es sei*

(18·3) $$L[y] = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu(x) y^{(\nu)}$$

ein homogener linearer Differentialausdruck k-ter Ordnung in y mit gegebenen stetigen Funktionen $p_\nu(x)$. *Dann heißt die Linearkombination mit den Konstanten* C_ϱ *und den ganzen Zahlen p, q*

(18·4) $$A = \sum_{\varrho=-p}^{q} C_\varrho y(x_i + \varrho h)$$

ein finiter Ausdruck r-ter Annäherung für den Differentialausdruck $L[y]$ *an der Stelle* $x = x_i$, *wenn bei Taylorentwicklung des Ausdruckes A an der Stelle* x_i *die Größe* $y^{(\nu)}(x_i)$ *für* $\nu \leq k$ *den Faktor* $p_\nu(x_i)$ *und für* $k+1 \leq \nu \leq k+r$ *den Faktor Null erhält.*

Es gilt dann für eine beliebige, $(k+r+1)$*-mal stetig differenzierbare Funktion* $y(x)$

(18·5) $$A = \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu(x_i)\, y^{(\nu)}(x_i) + \vartheta \cdot D \cdot |y^{(k+r+1)}|_{\max}.$$

Dabei ist $|\vartheta| \leq 1$, *D eine von y unabhängige Konstante, und* $|y^{(k+r+1)}|_{\max}$ *ist der Maximalbetrag von* $y^{(k+r+1)}$ *in einem* x_i *und alle* $x_i + \varrho h$ *enthaltenden Intervall.*

Satz: *Zu einem beliebig vorgegebenen linearen Differentialausdruck* (18·3) *gibt es an jeder Stelle* $x = x_i$ *und zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl r finite Ausdrücke r-ter Annäherung, sogar unendlich viele.*

Man braucht nur den Ausdruck (18·4) nach dem TAYLORschen Satz zu entwickeln und erhält:

$$(18{\cdot}6)\quad \begin{cases} A = & y(x_i)[\ C_{-p}+\cdots+C_{-1}+C_0+C_1+\cdots+C_q] \\ + & h y'(x_i)[-pC_{-p}-\cdots-C_{-1}+C_1+\cdots+qC_q] \\ + & \frac{h^2}{2!} y''(x_i)[\ p^2C_{-p}+\cdots+C_{-1}+C_1+\cdots+q^2C_q] \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & \frac{h^{k+r}}{(k+r)!} y^{(k+r)}(x_i)[(-p)^{k+r}C_{-p}+\cdots+q^{k+r}C_q]+R, \end{cases}$$

wobei der Rest mit $|\vartheta| \leq 1$ sich in der Gestalt schreiben läßt:

$$(18{\cdot}7)\qquad R = \frac{h^{k+r+1}}{(k+r+1)!}\vartheta \cdot |y^{(k+r+1)}|_{\max} \cdot \sum_{\varrho=-p}^{q} |\varrho^{k+r+1} C_\varrho| .$$

Die Übereinstimmung der Entwicklung (18·6) mit (18·3) ergibt für die C_ϱ die $(k+r+1)$ Gleichungen

$$(18{\cdot}8)\qquad \sum_{\varrho=-p}^{q} \varrho^\varkappa C_\varrho = \begin{cases} \frac{\varkappa!}{h^\varkappa} p_\varkappa(x_i) & \text{für } 0 \leq \varkappa \leq k \\ 0 & \text{für } k+1 \leq \varkappa \leq k+r. \end{cases}$$

Diese linearen Gleichungen sind im Falle $q + p \geq k + r$, d. h. im Falle, daß man überhaupt genügend viele Abszissen $x_i + \varrho h$ und damit genügend viele Unbekannte hat, stets lösbar; man kann alle C_ϱ bis auf $k + r + 1$ beliebige unter ihnen gleich Null setzen und die restlichen C_ϱ aus den Gleichungen (18·8) berechnen, denn die zugehörige Koeffizientendeterminante ist eine VANDERMONDEsche Determinante und mithin als Produkt von Differenzen voneinander verschiedener ganzer Zahlen[1]) stets von Null verschieden.

In Tafel VIII sind für die niedrigeren Ableitungen einfache finite Ausdrücke zusammengestellt; aus ihnen erhält man durch Überlagerung finite Ausdrücke für beliebige Differentialausdrücke bis zur vierten Ordnung einschließlich.

18·2. Das Differenzenverfahren höherer Annäherung[2]). Man führt dieses Verfahren ganz entsprechend dem in § 17 beschriebenen gewöhnlichen

---

[1]) Vgl. z. B. O. PERRON, Algebra, Berlin und Leipzig 1927, Bd. I, S. 94/95.

[2]) L. COLLATZ, Schriften des Math. Sem. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin, Bd. 3 (1935), S. 1—34.

Tafel VIII. Ausdrücke des Differenzenverfahrens für gewöhnliche Differentialquotienten.

Verfahren	Ausdrücke für	Ausdruck Abkürzungen: $y_i = y(ih)$, $y_i' = y'(ih)$ usw.	Die weiteren Glieder bei Taylorentwicklung des linksstehenden Ausdruckes
Gewöhnliches Differenzenverfahren nach § 17	y'	$y_0' = \frac{1}{h}(y_1 - y_0) +$	$-\frac{h}{2} y_0'' - \frac{h^2}{6} y_0''' - \cdots$
		$y_0' = \frac{1}{2h}(y_1 - y_{-1}) +$	$-\frac{h^2}{6} y_0''' - \frac{h^4}{120} y_0^{V} - \cdots$
	y''	$y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_0 + y_{-1}) +$	$-\frac{h^2}{12} y_0^{IV} - \frac{h^4}{360} y_0^{VI} - \cdots$
	y'''	$y_0''' = \frac{1}{2h^3}(y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}) +$	$-\frac{h^2}{4} y_0^{V} - \frac{h^4}{40} y_0^{VII} - \cdots$
	y^{IV}	$y_0^{IV} = \frac{1}{h^4}(y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}) +$	$-\frac{h^2}{6} y_0^{VI} - \frac{h^4}{30} y_0^{VIII} - \cdots$
Verfahren höherer Annäherung nach 18.2	y'	$y_0' = \frac{1}{12h}(-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}) +$	$+\frac{h^4}{30} y_0^{V} + \cdots$
		$y_0' = \frac{1}{60h}(y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_{-1} + 9y_{-2} - y_{-3}) +$	$-\frac{h^6}{140} y_0^{VII} + \cdots$
	y''	$y_0'' = \frac{1}{12h^2}(-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}) +$	$+\frac{h^4}{90} y_0^{VI} + \cdots$
		$y_0'' = \frac{1}{180h^2}(2y_3 - 27y_2 + 270y_1 - 490y_0 + 270y_{-1} - 27y_{-2} + 2y_{-3}) +$	$-\frac{h^6}{560} y_0^{VIII} + \cdots$

Tafel VIII (Fortsetzung).

Verfahren	Ausdrücke für	Ausdruck Abkürzungen: $y_i = y(ih)$, $y'_i = y'(ih)$ usw.	Die weiteren Glieder bei Taylorentwicklung des linksstehenden Ausdruckes
Verfahren höherer Annäherung nach 18·2	y'''	$y'''_0 = \frac{1}{8h^3}(-y_3 + 8y_2 - 13y_1 + 13y_{-1} - 8y_{-2} + y_{-3}) +$	$+\frac{7h^4}{120}y_0^{VII} + \cdots$
	y^{IV}	$y_0^{IV} = \frac{1}{6h^4}(-y_3 + 12y_2 - 39y_1 + 56y_0 - 39y_{-1} + 12y_{-2} - y_{-3}) +$	$+\frac{7h^4}{240}y_0^{VIII} + \cdots$
Heranziehen der Ableitung an mehreren Punkten nach 18·4	y'	$y_1 - y_0 - \frac{h}{2}(y'_1 + y'_0) = 0 +$	$-\frac{h^3}{12}y'''_0 + \cdots$
		$y_1 - y_{-1} - \frac{h}{3}(y'_1 + 4y'_0 + y'_{-1}) = 0 +$	$-\frac{h^5}{90}y_0^{V} + \cdots$
	y''	$y_1 - 2y_0 + y_{-1} - \frac{h^2}{12}(y''_1 + 10y''_0 + y''_{-1}) = 0 +$	$-\frac{h^6}{240}y_0^{VI} + \cdots$
		$-y_2 - 16y_1 + 34y_0 - 16y_{-1} - y_{-2} + \frac{4}{3}h^2(2y''_1 + 11y''_0 + 2y''_{-1}) = 0 +$	$-\frac{92}{3}\frac{h^8}{7!}y_0^{VIII} + \cdots$
	y'''	$y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} - \frac{h^3}{2}(y'''_1 + 2y'''_0 + y'''_{-1}) = 0 +$	$+\frac{h^7}{120}y_0^{VII} + \cdots$
	y^{IV}	$y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2} - \frac{h^4}{6}(y_1^{IV} + 4y_0^{IV} + y_{-1}^{IV}) = 0 +$	$-\frac{h^8}{720}y_0^{VIII} + \cdots$

Differenzenverfahren, das man als ein Verfahren erster Annäherung auffassen kann, durch, indem man jetzt nur die Differentialquotienten durch die in 18·1 und in Tafel VIII angegebenen finiten Ausdrücke ersetzt. Mit der in 17·1 beschriebenen Intervallteilung und der Maschenweite h werde das Verfahren r-ter Annäherung durchgeführt, wobei wir uns auf den Fall eines ungeraden $r = 2s + 1$ beschränken. Wir ersetzen dann jeden Differentialquotienten an der Stelle x_i durch einen finiten Ausdruck r-ter Annäherung, der nur die zu x_i symmetrisch gelegenen Stellen von x_{i-m-s} bis x_{i+m+s} benutzt ($2m$ sei die Ordnung der Differentialgleichung). Dann kann man für jeden der beiden Randpunkte und der $(n-1)$ inneren Teilpunkte, also für die Stellen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, eine der Differentialgleichung entsprechende finite Gleichung aufstellen und erhält für die $n + 2m + 2s + 1$ auftretenden unbekannten Funktionswerte Y_i, nämlich die Werte von Y_{-m-s} bis Y_{n+m+s}, $(n+1)$ Gleichungen. Ferner liefert jede der $2m$ Randbedingungen eine finite Gleichung. Dann fehlen noch $2s$ Gleichungen. Man ist daher genötigt, noch $2s$ finite Gleichungen niedrigerer Annäherung hinzuzufügen, was man auf mancherlei Weise tun kann, z. B. kann man für jeden der beiden Randpunkte x und x_n die der Differentialgleichung entsprechenden finiten Gleichungen $1, 3, \ldots, (2s-1)$-ter Annäherung hinzunehmen. Diese Art ist auch in den folgenden Beispielen durchgeführt. Kommt in den Randbedingungen die $(2m-1)$-te Ableitung nicht vor, so kann man die für x_0 und x_n angeschriebenen finiten Gleichungen r-ter Annäherung fortlassen, es treten dann nur die Werte Y_{-m-s+1} bis $Y_{n+m+s-1}$ auf.

18·3. Beispiel für das Differenzenverfahren höherer Annäherung. Wir verwenden das in 17·2 mit dem gewöhnlichen Differenzenverfahren durchgeführte Beispiel des abgesetzten Knickstabes (Abb. 17·2), also das durch (17·5), (17·6) formulierte Eigenwertproblem. Bei der Maschenweite $h = \frac{1}{3}$ erhalten wir für die unbekannten Funktionswerte $Y_{-1}, Y_0, Y_1, \ldots, Y_4$ (Abb. 18·1) an den Stellen x_1, x_2 die beiden finiten Gleichungen dritter Annäherung:

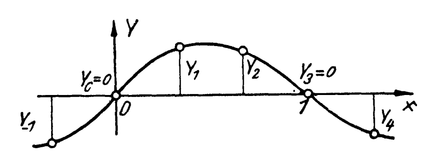


Abb. 18·1. Über das Intervall 0, 1 herausgreifende Funktionswerte.

$$\frac{-Y_3 + 16Y_2 - 30Y_1 + 16Y_0 - Y_{-1}}{12h^2} + \Lambda \cdot 2 \cdot Y_1 = 0,$$

$$\frac{-Y_4 + 16Y_3 - 30Y_2 + 16Y_1 - Y_0}{12h^2} + \Lambda \cdot 1 \cdot Y_2 = 0.$$

Die Randbedingungen besagen $Y_0 = Y_3 = 0$. Um die über das Intervall von 0 bis 1 hinausgehenden Werte Y_{-1} und Y_4 zu eliminieren, muß man noch auf

Gleichungen niedrigerer Annäherung zurückgreifen. Wir schreiben daher für x_0 und x_3 noch die der Differentialgleichung entsprechenden gewöhnlichen Differenzengleichungen auf:

$$\frac{Y_1 - 2Y_0 + Y_{-1}}{h^2} + 2\Lambda Y_0 = 0,$$

$$\frac{Y_4 - 2Y_3 + Y_2}{h^2} + \Lambda Y_3 = 0.$$

Diese reduzieren sich wegen der Randbedingungen $Y_0 = Y_3 = 0$ auf $Y_{-1} = -Y_1$, $Y_4 = -Y_2$. Mit der Abkürzung $\mu = 12\Lambda h^2$ lauten jetzt unsere Gleichungen

$$16\,Y_2 - 29\,Y_1 + 2\mu Y_1 = 0,$$
$$16\,Y_1 - 29\,Y_2 + \mu Y_2 = 0.$$

Die gleich 0 gesetzte Determinante

$$0 = \begin{vmatrix} -29 + 2\mu & 16 \\ 16 & -29 + \mu \end{vmatrix} = 2\mu^2 - 87\mu + 585 = 0$$

ergibt

$$\mu = \frac{1}{4}\left(87 \pm \sqrt{2889}\right)$$

oder

$$\Lambda = \begin{cases} 6{,}2345 & (\text{Fehler} - 2{,}7\,\%) \\ 26{,}39 & (\;\text{„} \quad -7\,\%). \end{cases}$$

Der Vergleich mit den Ergebnissen des gewöhnlichen Differenzenverfahrens in 17·2 zeigt, daß man hier mit der großen Maschenweite $h = \frac{1}{3}$ bessere Werte erzielt hat als dort mit $h = \frac{1}{5}$.

18·4. Heranziehen der Differentialgleichung an mehreren Punkten. Die jetzt in 18·4 bis 18·6 zu besprechende Methode führt bei einfach gebauten Differentialgleichungen oft zu schönen Ergebnissen, bisweilen aber wird ihre Durchführung auch recht verwickelt. Die Verbesserung gegenüber dem gewöhnlichen Differenzenverfahren besteht darin, daß man bei jeder einzelnen Differenzengleichung die Eigenwertgleichung an mehreren Stellen heranzieht. Die Grundlage des Verfahrens besteht in gewissen, ein für alle Male aufstellbaren Ausdrücken folgender Bauart:

$$B = \sum_{\nu=i-p}^{i+p}{}' \left(a_\nu y_\nu + A_\nu y_\nu^{(k)}\right). \tag{18·9}$$

Es werden also Linearkombinationen der Werte von y und der Werte einer fest gewählten k-ten Ableitung von y an benachbarten Teilungsstellen x_ν gebildet und dabei die Konstanten a_ν, A_ν so bestimmt, daß bei TAYLORscher Entwicklung des Ausdruckes B an der Stelle x_i die Ableitungen bis zu möglichst hoher Ordnung den Faktor Null bekommen.

Wir erläutern dies an dem Beispiel $k = 2$ der zweiten Ableitung. Für diese kennen wir den gewöhnlichen zweiten Differenzenquotienten, vgl. (17·2), und können schreiben

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 y_i'' \approx 0,$$

und zwar ergibt sich bei TAYLOR-Entwicklung an der Stelle x_i ein Fehlerglied mit $h^4 y^{IV}$ Nun liegt es nahe, durch Hinzunahme von y''_{i+1} und y''_{i-1} eine Formel aufzustellen, bei der das Fehlerglied von höherer Ordnung wird. Wir setzen an, wobei wir $i = 0$ nehmen:

$$B = a_{-1} y_{-1} + a_0 y_0 + a_1 y_1 + A_{-1} y''_{-1} + A_0 y''_0 + A_1 y''_1$$

und erhalten die TAYLOR-Entwicklung

$$B = \begin{cases} \quad y_0 \; (a_{-1} + a_0 + a_1) \\ + \; h y'_0 \; (-a_{-1} \qquad + a_1) \\ + \frac{h^2}{2!} y''_0 \left(+a_{-1} \qquad + a_1 + \frac{2}{h^2}[A_{-1} + A_0 + A_1]\right) \\ + \frac{h^3}{3!} y'''_0 \left(-a_{-1} \qquad + a_1 + \frac{6}{h^2}[-A_{-1} \qquad + A_1]\right) \\ + \frac{h^4}{4!} y^{IV}_0 \left(+a_{-1} \qquad + a_1 + \frac{12}{h^2}[A_{-1} \qquad + A_1]\right) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Setzt man die runden Klammern gleich Null, so folgt:

$$a_{-1} = a_1 = -\frac{1}{2} a_0 ,$$

$$A_{-1} = A_1 = -\frac{h^2}{12} a_1 = \frac{1}{10} A_0 .$$

So erhält man die Formel (aus Symmetriegründen fallen auch die Glieder mit y^V fort):

$$(18\cdot10) \quad \begin{cases} \frac{B}{a_1} = y_1 - 2 y_0 + y_{-1} - \frac{h^2}{12}(y''_1 + 10 y''_0 + y''_{-1}) \\ \qquad\qquad + \text{Glieder 6. Ordnung} = 0 . \end{cases}$$

Nach diesem Beispiel der zweiten Ableitung wenden wir uns wieder dem allgemeinen Falle einer beliebigen, der k-ten Ableitung zu. Für diese ergibt die TAYLOR-Entwicklung des Ausdruckes B in (18·9) an der Stelle x_i:

$$(18\cdot11) \quad \begin{cases} B = \sum\limits_{\nu=i-p}^{i+p} \left\{ a_\nu \left(y_i + (\nu - i) h y'_i + (\nu - i)^2 \frac{h^2}{2!} y''_i + \cdots \right) \right. \\ \qquad \left. + A_\nu \left(y_i^{(k)} + (\nu - i) h y_i^{(k+1)} + (\nu - i)^2 \frac{h^2}{2!} y_i^{(k+2)} + \cdots \right) \right\} ; \end{cases}$$

die a_ν und A_ν sollen so ermittelt werden, daß y_i, y'_i, y''_i, ... bis zu Ableitungen möglichst hoher Ordnung, etwa bis zur $(k + r)$-ten Ordnung einschließlich, den Faktor 0 erhalten.

Somit ergeben sich für die Konstanten a_ν und für die Größen

$$(18\cdot12) \qquad b_\nu = \frac{k!}{h^k} A_\nu$$

die Gleichungen

$$(18{\cdot}13)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=i-p}^{i+p} a_\nu (\nu - i)^\varkappa = 0 & \text{für}\quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1. \\ \displaystyle\sum_{\nu=i-p}^{i+p} \left[a_\nu (\nu - i)^\varkappa + b_\nu \binom{\varkappa}{k} (\nu - i)^{\varkappa - k} \right] = 0 & \\ & \text{für}\quad \varkappa = k, k+1, \ldots, k+r. \end{cases}$$

Nun suchen wir Ausdrücke B der Gestalt (18·9), bei denen nicht alle a_ν und b_ν verschwinden sollen. Das ist gewährleistet, wenn wir etwa verlangen, es soll $b_i \neq 0$ sein, d. h. der Koeffizient an der Stelle der Entwicklung x_i. Da in B ein Faktor frei ist, können wir $b_i = 1$ setzen. Dann ist (18·13) ein inhomogenes Gleichungssystem von $(k + r + 1)$ Gleichungen für die Unbekannten a_ν und b_ν. Das Gleichungssystem hat, wenn man nur p genügend groß wählt und genügend viele Unbekannte zur Verfügung hat, beliebig viele Lösungen (die Existenz unendlich vieler Lösungen folgt schon daraus, daß jedem der nach (18·1) aufstellbaren finiten Ausdrücke eine Lösung von (18·13) entspricht). Für die niedrigeren Ableitungen (bis zur vierten Ordnung einschließlich) sind in Tafel VIII Ausdrücke der Gestalt (18·9) zusammengestellt. Für den Fall, daß man genau drei Werte b_{-1}, b_0, b_1 benutzt, sind für Ableitungen beliebiger Ordnung in Aufg. 6 von (19·6) explizite Ausdrücke angegeben. Schließlich sei noch folgender Spezialfall herausgegriffen: Es seien k und r gerade Zahlen, $k = 2p$, $r = 2q$ und es sei $0 < q \leq p$. Wir behalten nur die b_ν mit $|\nu - i| \leq q$ bei, setzen also

$$b_{i-p} = b_{i-p+1} = \cdots = b_{i-q-1} = b_{i+q+1} = b_{i+q+2} = \cdots = b_{i+p} = 0.$$

Wir behaupten, daß dann das Gleichungssystem (18·13) eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, wenn man als Normierungsvorschrift an Stelle von $b_i = 1$ etwa $a_i = 1$ wählt.

In diesem Falle stimmt nämlich die Anzahl der Gleichungen mit der der Unbekannten überein, sie ist $k + r + 1$; wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß die zugehörige Determinante D nicht verschwindet. Sie lautet

$$(18{\cdot}14)\quad D = \begin{vmatrix} 1 \cdots\cdots 1 & 1 \cdots 1 & 0 \cdots\cdots\cdots 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ -p \cdots\cdots -1 & 1 \cdots p & 0 \cdots\cdots\cdots 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ p^2 \cdots\cdots 1 & 1 \cdots p^2 & 0 \cdots\cdots\cdots 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ (-p)^{k-1} \cdots (-1)^{k-1} & 1 \cdots p^{k-1} & 0 \cdots\cdots\cdots 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ (-p)^k \cdots\cdots (-1)^k & 1 \cdots p^k & 1 \cdots\cdots\cdots 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ (-p)^{k+1} \cdots (-1)^{k+1} & 1 \cdots p^{k+1} & \binom{k+1}{k}(-q) \cdots \binom{k+1}{k}(-1) & 0 & \binom{k+1}{k} \cdots \binom{k+1}{k} q \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ (-p)^{k+r} \cdots (-1)^{k+r} & 1 \cdots p^{k+r} & \binom{k+r}{k}(-q)^r \cdots \binom{k+r}{k}(-1)^r & 0 & \binom{k+r}{k} \cdots \binom{k+r}{k} q^r \end{vmatrix}$$

Hierbei ist D das Produkt aus den zwei Determinanten

(18·15) $$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \cdots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-p)^{k-1} & \cdots & (-1)^{k-1} & 1 \cdots p^{k-1} \end{vmatrix}$$

und

(18·15) $$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{k+r}{k}(-q)^r & \cdots & \binom{k+r}{k} q^r \end{vmatrix}.$$

Beide Determinanten sind von Null verschieden, D_1 als VANDERMONDEsche Determinante (vgl. 18·1), und D_2 geht nach Herausziehen der Faktoren $\binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \ldots, \binom{k+r}{k}$ aus den einzelnen Zeilen in eine VANDERMONDEsche Determinante über.

18·5. Beispiel. Wir betrachten wieder den abgesetzten Knickstab von 17·2 und 18·3 (Abb. 17·2) mit den Gleichungen (17·5) und (17·6):

$$y'' = -\lambda g_0 y; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Bei der Maschenweite $h = \frac{1}{3}$ haben wir wie in Abb. 17·2 die Funktionswerte Y_0, Y_1, Y_2, Y_3. Wir stellen die Formel (18·10) bei Unterdrückung der Glieder sechster Ordnung (dann müssen wir an Stelle der Funktionswerte y_i und der Ableitungen y_i'' Näherungen Y_i und Y_i'' schreiben) auf für die Stellen $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = \frac{2}{3}$:

$$Y_2 - 2Y_1 + Y_0 - \frac{h^2}{12}(Y_2'' + 10Y_1'' + Y_0'') = 0,$$

$$Y_3 - 2Y_2 + Y_1 - \frac{h^2}{12}(Y_3'' + 10Y_2'' + Y_1'') = 0.$$

Die Randbedingungen sind $Y_0 = Y_3 = 0$.

Nach der Differentialgleichung ist

$$Y_1'' = -\Lambda \cdot 2 \cdot Y_1; \quad Y_2'' = -\Lambda \cdot 1 \cdot Y_2; \quad Y_0'' = Y_3'' = 0,$$

also folgt

$$Y_2 - 2Y_1 + \frac{h^2}{12}\Lambda(Y_2 + 20Y_1) = 0,$$

$$-2Y_2 + Y_1 + \frac{h^2}{12}\Lambda(10Y_2 + 2Y_1) = 0.$$

Mit

$$\Lambda\frac{h^2}{12} = \mu$$

lautet die Determinante

$$\begin{vmatrix} -2 + 20\mu & 1 + \mu \\ 1 + 2\mu & -2 + 10\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Mit $\mu = \frac{1}{\nu}$ erhält man so die quadratische Gleichung

$$\nu^2 - 21\nu + 66 = 0$$

und daraus

$$\Lambda = \begin{cases} 6{,}2966 & (\text{Fehler } -1{,}7\,\%)\,, \\ 28{,}067 & (\text{Fehler } -1{,}3\,\%)\,. \end{cases}$$

Diese Werte sind viel besser als die des gewöhnlichen Differenzenverfahrens in 17·2 und auch besser als die des Verfahrens dritter Annäherung in 18·3.

18·6. Das Verfahren im allgemeinen Fall. Die Differentialgleichung laute

$$M[y] = \lambda N[y]\,.$$

Die höchste vorkommende Ableitung sei $y^{(2m)}$. Dann stellen wir die Formel (18·9) mit $k = 2m$ für $y^{(2m)}$ auf und schreiben die Gleichung

$$\sum_{\nu=i-p}^{i+p} (a_\nu Y_\nu + A_\nu Y_\nu^{(2m)}) = 0 \tag{18·16}$$

für alle inneren Punkte an.

Nun wird $Y_\nu^{(2m)}$ überall unter Benutzung der Differentialgleichung ersetzt durch die niedrigeren Ableitungen $Y_\nu^{(2m-1)}, Y_\nu^{(2m-2)}, \ldots, Y'_\nu, Y_\nu$. Diese $Y^{(s)}$ treten jetzt als weitere Unbekannte auf; man schreibt daher für alle diejenigen Ableitungen, die in der Differentialgleichung vorkommen, die entsprechenden Formeln (18·9) für alle inneren Punkte an. (Die Konstanten a_ν, A_ν sind zur Unterscheidung mit Strichen versehen.)

$$\left\{\begin{aligned} \sum_\nu (a'_\nu Y_\nu + A'_\nu\; Y_\nu^{(2m-1)}) &= 0 \\ \sum_\nu (a''_\nu Y_\nu + A''_\nu\; Y_\nu^{(2m-2)}) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum_\nu (a_\nu^{(2m-1)} Y_\nu + A_\nu^{(2m-1)} Y'_\nu) &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{18·17}$$

Besondere Aufmerksamkeit verlangen die Randstellen. Hier kann es zur Elimination aller überzähligen Unbekannten nötig werden, „einseitige" Formeln zu verwenden. Wir erläutern das an dem

Beispiel: Torsionsschwingungen einer Scheibe. Die Schwingungsaufgabe von Aufgabe 4 in 11·4 (S. 175) führt auf die Differentialgleichung

$$-(e^{-x^2}\cdot y')' = \lambda e^{-x^2} y$$

oder

$$y'' = 2xy' - \lambda y \tag{18·18}$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y'(1) = 0\,.$$

Bei Behandlung dieser Aufgabe mit dem Differenzenverfahren verwenden wir (Abb. 18·2) die grobe Maschenweite $h = \frac{2}{5}$, also $\frac{h^2}{12} = \frac{1}{75}$. Dann ergibt Formel

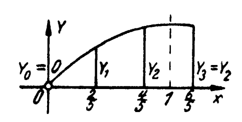


Abb. 18·2. Differenzenverfahren beim Beispiel einer Torsionsschwingung in 18·6.

(18·10) angeschrieben für $x = \frac{2}{5}$ und $x = \frac{4}{5}$:

$$Y_2 - 2\,Y_1 - \frac{1}{75}(Y_2'' + 10\,Y_1'' + Y_0'') = 0$$

$$-\,Y_2 + \quad Y_1 - \frac{1}{75}(Y_3'' + 10\,Y_2'' + Y_1'') = 0\,.$$

Hierbei sind bereits die Randbedingungen in der Form $Y_0 = 0$, $Y_2 = Y_3$ verwendet (ferner benutzen wir später die Symmetrie noch durch $Y_3' = -\,Y_2'$). Nun ist nach der Differentialgleichung (18·18) mit $\varLambda$ als Näherungswert für λ:

$$Y_0'' = 0$$

$$Y_1'' = \frac{4}{5}\,Y_1' - \varLambda\,Y_1$$

$$Y_2'' = \frac{8}{5}\,Y_2' - \varLambda\,Y_2$$

$$Y_3'' = \frac{12}{5}\,Y_3' - \varLambda\,Y_3 = -\frac{12}{5}\,Y_2' - \varLambda\,Y_2\,.$$

Jetzt müssen noch die Formeln für y' angeschrieben werden. Nach Tafel VIII erhält man für $x = \frac{2}{5}$ und $x = \frac{4}{5}$ die Gleichungen

$$Y_2 - \frac{2}{15}(Y_2' + 4\,Y_1' + Y_0') = 0$$

$$Y_3 - Y_1 - \frac{2}{15}(\underbrace{Y_3' + 4\,Y_2'}_{3\,Y_2'} + Y_1') = 0\,.$$

Jetzt ist noch Y_0' zu eliminieren. Dazu müssen wir einen einseitigen Ausdruck verwenden; er ist nach Tafel VIII

$$Y_1 - \frac{1}{5}(Y_1' + Y_0') = 0\,.$$

Nun hat man die genügende Anzahl von Gleichungen zur Elimination der unbekannten Funktionswerte.

Die Ausrechnung ergibt

$$218\,\varLambda^2 - 5423\,\varLambda - 16329 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\varLambda = \begin{cases} 3{,}5049 & (\text{Fehler} - \;\, 2{,}5\,\%) \\ 21{,}371 & (\text{Fehler} - 11\,\%)\,. \end{cases}$$

§ 19. Das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen.

Wie bereits in § 17 betont wurde, ist das Differenzenverfahren ein ganz allgemeines, stets anwendbares Verfahren; es gibt bei partiellen Differentialgleichungen Bereiche, bei denen das Differenzenverfahren das einzige praktisch brauchbare Verfahren ist und bei denen mit anderen Verfahren die Randbedingungen nur schwer erfaßbar sind.

Wir beschränken uns der bequemeren Darstellung wegen auf zwei unabhängige Veränderliche x, y, obwohl sich das Verfahren genau so bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen anwenden läßt.

19·1. Das gewöhnliche Differenzenverfahren oder Verfahren erster Annäherung. Wir legen ein rechteckiges Netz mit den Maschenweiten h und l und den „Gitterpunkten" mit den Koordinaten

$$(19{\cdot}1) \qquad \left\{\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih \\ y_k &= y_0 + kl \end{aligned}\right\} (i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

zugrunde (Abb. 19·1). Die Wahl des Anfangspunktes x_0, y_0 und der Maschenweiten h und l ist an sich willkürlich; meist wird man jedoch bei Berücksichtigung der Randbedingungen zu erreichen suchen, daß etwaige geradlinige Randstrecken mit den „Gittergeraden" (19·1) zusammenfallen oder bei krummlinigen Randstrecken besonders ausgezeichnete Punkte zu Gitterpunkten werden. Man kann auch andere als Rechtecksgitter verwenden (vgl. 19·5), jedoch werden die Differenzenausdrücke kompliziert und unbequem für die numerische Rechnung, insbesondere, wenn man ein Gitter verwendet, das nicht mehr durch eine Translation in sich überführbar ist. Am meisten werden quadratische Gitter (gleiche Maschenweiten, $h = l$) benutzt.

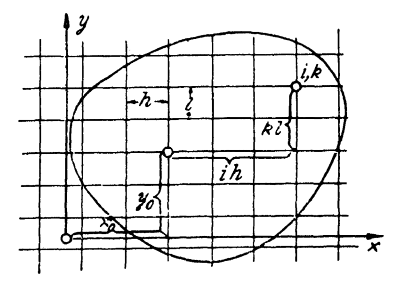


Abb. 19·1. Rechteckiges Gitter zum Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen.

Wir bezeichnen Funktionswerte an einer Gitterstelle x_i, y_k durch Anhängen der Indizes i, k; so bedeutet $z_{i,k}$ den Wert einer gesuchten Funktion $z(x, y)$ für $x = x_i$, $y = y_k$ und $Z_{i,k}$ einen Näherungswert für $z_{i,k}$.

Der Differentialgleichung und den Randbedingungen werden jetzt genau wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen Differenzengleichungen bzw. finite Gleichungen gegenübergestellt. Die den Differentialquotienten entsprechenden Differenzenquotienten bzw. finiten Ausdrücke kann man leicht mit Hilfe von „Verschiebungsoperatoren" E_x und E_y bilden, die bei einer beliebigen Funktion $g(x, y)$ die Argumente x bzw. y um die Maschenweite vermehren, die also durch

$$(19{\cdot}2) \qquad \left\{\begin{aligned} E_x g(x, y) &= g(x + h, y) \qquad & E_y g(x, y) &= g(x, y + l) \\ E_x z_{i,k} &= z_{i+1,k} & E_y z_{i,k} &= z_{i,k+1} \end{aligned}\right.$$

festgelegt sind. Die Operatoren lassen sich in beliebige ganzzahlige (positive oder negative) Potenzen erheben[1]):

$$E_x^k E_y^m g(x, y) = g(x + kh, y + ml).$$

Man kann mit diesen Operatoren wie mit einer algebraischen Größe formal rechnen und sie mit Differentialoperatoren vertauschen.

Als Beispiel für das Rechnen mit den Operatoren soll zu $\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}$ ein Differenzenquotient aufgestellt werden. Nach der Tafel VIII ist bei Fortlassen der Restglieder, wenn wir gleiche Maschenweiten $h = l$ benutzen,

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)_{0,0} \approx \frac{1}{h^2}(g_{1,0} - 2g_{0,0} + g_{-1,0}) = \frac{1}{h^2}(E_x - 2E_x^0 + E_x^{-1})g_{0,0},$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{0,0} \approx \frac{1}{2h}(g_{0,1} - g_{0,-1}) = \frac{1}{2h}(E_y - E_y^{-1})g_{0,0}.$$

Also

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y} g\right)_{0,0} \approx \frac{1}{2h^3}(E_x - 2E_x^0 + E^{-1})(E_y - E_y^{-1})g_{0,0}$$

$$= \frac{1}{2h^3}(g_{1,1} - 2g_{0,1} + g_{-1,1} - g_{1,-1} + 2g_{0,-1} - g_{-1,-1}).$$

Man kann so einer beliebigen Differentialgleichung eine Differenzengleichung gegenüberstellen. Dies macht man bei einem vorgelegten Eigenwertproblem für jeden „inneren" Gitterpunkt, d. h. jeden Gitterpunkt x_i, y_k, der selbst und dessen vier Nachbarpunkte x_{i+1}, y_k; x_{i-1}, y_k; x_i, y_{k+1}; x_i, y_{k-1} im Innern oder auf dem Rande Γ des beim Eigenwertproblem auftretenden Bereiches B liegen.

Besondere Sorgfalt erfordert die Übertragung der gegebenen Randbedingungen in Differenzenbedingungen, also Gleichungen zwischen den Z_{ik}. Die Art, in der diese Übertragung erfolgt, kann einen großen Einfluß auf die Genauigkeit der Näherungswerte haben. Ist z. B. auf einer gekrümmten Randlinie Γ die Randbedingung $z = 0$ vorgeschrieben (Abb. 19·2), so kann man ganz grob vorgehen und an der Stelle B den Wert $Z = 0$ setzen, darf dann aber keine große Genauigkeit erwarten. Besser ist es, zu fordern, daß die Werte von Z in den Punkten A, B, C graphisch dargestellt auf einer Geraden liegen[2]) sollen, also wenn AB die Länge δ hat:

$$Z_B = \frac{\delta}{\delta + h} Z_C$$

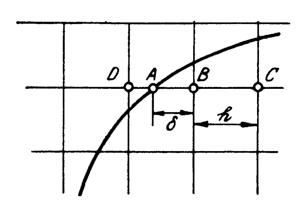


Abb. 19·2. Zur Behandlung der Randbedingung $z = 0$ beim Differenzenverfahren.

[1]) J. F. Steffensen, Interpolation, Baltimore 1927, S. 5ff. u. 179ff.
[2]) L. Collatz, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933) 56.

oder bei Heranziehen des außerhalb Γ liegenden Punktes D

$$Z_B = -\frac{\delta}{h-\delta} Z_D \,. \tag{19·3}$$

Bei komplizierteren Randbedingungen und gekrümmten Rändern kann es erforderlich sein, sich die Differenzenrandbedingungen durch TAYLOR-Entwicklung selbst herzuleiten.

19·2. Beispiel. Eigenschwingungen einer elliptischen Membran. Eine Membran von konstanter Dicke und elliptischer Form sei am Rande eingespannt. Die Bestimmung ihrer Eigenfrequenzen führt (vgl. 3·6) auf das Eigenwertproblem

$$-\Delta z = -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \lambda z \,.$$

Dabei sei $z = 0$ auf dem Rande der Ellipse mit den Halbachsenlängen 1 und 2

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \,.$$

Wir verwenden, lediglich um das Verfahren zu erläutern, ein ganz grobes quadratisches Gitter mit der Maschenweite $h = \frac{2}{3}$ und haben, wenn wir uns nur für die zur x- und y-Achse symmetrischen Schwingungsformen interessieren, sieben unbekannte Funktionswerte, die wir mit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ numerieren (Abb. 19·3).

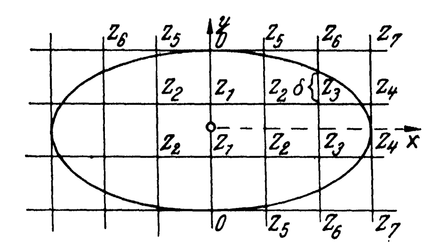


Abb. 19·3. Eigenschwingungen einer elliptischen Membran.

Dem Ausdruck $(\Delta z)_{i,k}$ entspricht hier durch unmittelbare Übertragung des zweiten Differenzenquotienten (17·2) der Ausdruck

$$\frac{1}{h^2}(Z_{i+1,k} + Z_{i-1,k} + Z_{i,k+1} + Z_{i,k-1} - 4\,Z_{i,k})\,. \tag{19·4}$$

Ist Λ der nach dem Differenzenverfahren zu berechnende Näherungswert für λ, so lautet mit der Abkürzung $\nu = 4 - \Lambda h^2$ die Differenzengleichung

$$Z_{i+1,k} + Z_{i-1,k} + Z_{i,k+1} + Z_{i,k-1} = \nu \cdot Z_{i,k}\,. \tag{19·5}$$

Im vorliegenden Falle hat man mit $\mu = \nu - 1$

$$\begin{aligned} 2\,Z_2 &= \mu\,Z_1 \\ Z_1 + Z_3 + Z_5 &= \mu Z_2 \\ Z_2 + Z_4 + Z_6 &= \mu\,Z_3\,. \end{aligned}$$

Setzt man nun grob $Z_4 = Z_5 = Z_6 = 0$ (Z_7 tritt hier nicht auf), so erhält man $\mu(\mu^2 - 3) = 0$ und damit die in der folgenden Tabelle in der ersten Spalte angegebenen Näherungen. Werte, die nicht ganz so grob sind, aber natürlich wegen der geringen Anzahl von Gitterpunkten immer noch ziemlich große Fehler haben, erhält man, wenn man Z_4, Z_5, Z_6 nach (19·3) eliminiert. In Abb. 19·3 ist z. B.

$$\delta = \frac{\sqrt{5} - 1}{3}\,, \qquad \text{also} \qquad Z_6 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} Z_3\,;$$

ebenso erhält man

$$Z_4 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} Z_3 \quad \text{und} \quad Z_5 = \frac{5-4\sqrt{2}}{7} Z_2 .$$

Dann folgt für μ die Gleichung

$$(\mu + 0{,}82514)(\mu^2 + 0{,}09384\mu - 2) = \mu .$$

Die Wurzeln μ, die sich daraus ergebenden Näherungswerte Λ_i und die nach dem Verfahren von 19·4 berechneten Werte mit $Z_7 = -\frac{3}{2} Z_3$ gibt die folgende Tabelle:

Wurzeln μ_i und Näherungswerte Λ_i .

Gewöhnliches Differenzenverfahren nach 19·1				Verfahren nach 19·4	
Randwerte $Z_4, Z_5, Z_6 = 0$		Randwerte nach (19·3) eliminiert			
μ_i	Λ_i	μ_i	Λ_i	μ_i	Λ_i
$\sqrt{3}$	2,853	1,5839	3,186	7,694	3,520
0	6,75	−0,528	7,94	−3,245	9,850
$-\sqrt{3}$	10,65	−1,976	11,20	−9,825	15,10

19·3. Differenzenverfahren mit höherer Annäherung. Bei diesem Verfahren ersetzt man (in genauer Parallele zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen, vgl. 18·1 bis 18·3) die Differenzenquotienten durch finite Ausdrücke, deren TAYLOR-Entwicklung mit dem vorgelegten Differentialausdruck weiter (d. h. bis zu Gliedern höherer Ordnung) übereinstimmt als die TAYLOR-Entwicklung der Differenzenquotienten. Zur Aufstellung derartiger finiter Ausdrücke stehen zwei Wege zur Verfügung, die Operatorenrechnung und die direkte TAYLOR-Entwicklung.

Es genügt, zu beschreiben, wie man bei einem beliebig vorgelegten Differentialausdruck zu einem einzelnen Glied $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ finite Ausdrücke findet (und zwar „finite Ausdrücke r-ter Annäherung", bei denen in der TAYLOR-Entwicklung außer dem Gliede $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ erst Glieder s-ter Ordnung mit $s = \alpha + \beta + r + 1$ auftreten).

Bei der Operatorenrechnung benutzt man wieder die durch (19·2) eingeführten Verschiebungsoperatoren E_x und E_y. Nach dem Satz in 18·1 gibt es zu der α-ten Ableitung finite Ausdrücke $(r + \beta + 1)$-ter Annäherung, die man mit Hilfe des Operators E_x in der Form schreiben kann:

$$\left(\frac{\partial^\alpha z}{\partial x^\alpha}\right)_{i,k} = \sum_{\varrho=-p}^{p} C_\varrho E_x^\varrho z_{i,k} + \vartheta_1 D \left|\frac{\partial^s z}{\partial x^s}\right|_{\max}$$

Dabei ist $r \geq 0$ beliebig vorgebbar, $s = r + \alpha + \beta + 1$, $|\vartheta_1| \leq 1$, D und p von r abhängige Zahlen. Entsprechend gibt es Konstanten C_ϱ^*, D^*, p^*, so daß mit $|\vartheta_2| \leq 1$

$$\left(\frac{\partial^\beta z}{\partial y^\beta}\right)_{i,k} = \sum_{\varrho=-p^*}^{p^*} C_\varrho^* E_y^\varrho z_{i,k} + \vartheta_2 D^* \left|\frac{\partial^s z}{\partial y^s}\right|_{\max}$$

gilt. Es gelten somit die folgenden Operatorengleichungen, wenn man die Operatoren nur auf ganze rationale Funktionen $z(x, y)$ anwendet, die in x und y von höchstens $(s-1)$-tem Grade sind, für die also die Restglieder fortfallen:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \sum_{\varrho=-p}^{p} C_\varrho E_x^\varrho; \qquad \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} = \sum_{\varrho=-p^*}^{p^*} C_\varrho^* E_y^\varrho.$$

Für die betrachtete Klasse von Funktionen gilt dann, da für sie Differentiation und Verschiebung vertauschbare Operationen sind:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \sum_{\varrho=-p}^{p} \sum_{\sigma=-p^*}^{p^*} C_\varrho C_\sigma^* E_x^\varrho E_y^\sigma = Q.$$

Nun bilden wir für eine beliebige, mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur s-ten Ordnung einschließlich versehene Funktion $g(x, y)$ den Ausdruck

$$(Qg(x, y))_{i,k} \equiv \sum_{\varrho=-p}^{p} \cdot \sum_{\sigma=-p^*}^{p^*} C_\varrho C_\sigma^* g(x_i + \varrho h,\ y_k + \sigma l)$$

und erhalten bei Entwicklung nach dem TAYLORschen Satz an der Stelle x_i, y_k:

$$\left(Qg - \frac{\partial^{\alpha+\beta} g}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)_{i,k} = \sum_{\substack{a\geq 0,\ b\geq 0\\ a+b<s}} \gamma_{a,b}\left(\frac{\partial^{a+b} g}{\partial x^a \partial y^b}\right)_{i,k} + \vartheta D' \, |g^{(s)}|_{\max}, \tag{19·6}$$

wobei $g_{\max}^{(s)}$ den Maximalbetrag aller partiellen Ableitungen s-ter Ordnung im Rechteck $|x - x_i| \leq sh$; $|y - y_k| \leq sl$ bedeutet, $|\vartheta| \leq 1$ und D' eine Konstante ist. Die Konstanten $\gamma_{a,b}$ sind dabei für alle betrachteten Funktionen $g(x, y)$ dieselben. Ist g eine ganze rationale Funktion von höchstens $(s-1)$-tem Grade in beiden Veränderlichen zusammen, so verschwindet die rechte Seite in (19·6). Setzt man $g = (x - x_i)^a (y - y_k)^b$, mit $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b < s$, so folgt $\gamma_{a,b} = 0$, d. h. $Qg(x, y)$ ist der gesuchte finite Ausdruck für

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} g(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

Die Zahl s konnte dabei beliebig groß gewählt werden, d. h. es gibt finite Ausdrücke beliebiger Annäherung[1]).

---

[1]) Die gleiche Operatorenmethode läßt sich bei beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen durchführen, siehe Fußnote[3]) von S. 271, a. a. O. S. 15—17.

Tafel IX. Ausdrücke des Differenzenverfahrens für die Operatoren Δ und $\Delta\Delta$.

Verfahren	Ausdruck Abkürzung: $z_{i,k} = z(ih, kh)$; $\Delta z_{i,k} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=ih\\y=kh}}$	Die weiteren Glieder bei TAYLOR-Entwicklung des linksstehenden Ausdruckes Abkürzung $\zeta_{i,k} = \left(\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} + \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^k \partial y^i}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$
Gewöhnliches Differenzenverfahren nach 19·1	$\Delta z_{0,0} \equiv \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{0,0} = \frac{1}{h^2}(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1} - 4z_{0,0}) +$	$-\frac{h^2}{12}\zeta_{0,4} - \frac{h^4}{360}\zeta_{0,6} - \frac{h^6}{20\,160}\zeta_{0,8} - \cdots$
	$\Delta\Delta z_{0,0} \equiv \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)_{0,0} = \frac{1}{h^4}[20 z_{0,0} - 8(z_{1,0} + z_{0,1}$ $+ z_{-1,0} + z_{0,-1}) + 2(z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1} + z_{-1,-1}) + (z_{0,2} + z_{2,0}$ $+ z_{-2,0} + z_{0,-2})] +$	$-\frac{h^2}{6}(\zeta_{0,6} + \zeta_{2,4}) - \cdots$
Verfahren höherer Annäherung nach 19·3	$\Delta z_{0,0} = \frac{1}{12h^2}[-60 z_{0,0} + 16(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) - (z_{2,0}$ $+ z_{0,2} + z_{-2,0} + z_{0,-2})] +$	$+\frac{h^4}{90}\zeta_{0,6} + \frac{h^6}{1008}\zeta_{0,8} + \cdots$
	$\Delta\Delta z_{0,0} = \frac{1}{6h^4}[-(z_{3,0} + z_{0,3} + z_{-3,0} + z_{0,-3}) + 14(z_{2,0} + z_{0,2}$ $+ z_{-2,0} + z_{0,-2}) - 77(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) + 184 z_{0,0}$ $+ 20(z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1} + z_{-1,-1}) - (z_{1,2} + z_{2,1} + z_{1,-2} + z_{2,-1}$ $+ z_{-1,2} + z_{-2,1} + z_{-1,-2} + z_{-2,-1})] +$	$+\frac{h^4}{4320}(151\zeta_{0,8} + 96\zeta_{2,6} + 30\zeta_{4,4}) + \cdots$
Heranziehen des Operators an mehreren Punkten nach 19·4	$40 z_{0,0} - 8(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) - 2(z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1}$ $+ z_{-1,-1}) + 8h^2 \Delta z_{0,0} + h^2(\Delta z_{1,0} + \Delta z_{0,1} + \Delta z_{-1,0} + \Delta z_{0,-1}) =$	$\frac{h^6}{60}(3\zeta_{0,6} - 5\zeta_{2,4}) + \cdots$
	$140 z_{0,0} - 16(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1} + z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1} + z_{-1,-1})$ $- 3(z_{2,0} + z_{0,2} + z_{-2,0} + z_{0,-2}) + \frac{2}{3}h^2[46\Delta z_{0,0} + 10(\Delta z_{1,0} + \Delta z_{0,1}$ $+ \Delta z_{-1,0} + \Delta z_{0,-1}) + \Delta z_{1,1} + \Delta z_{1,-1} + \Delta z_{-1,1} + \Delta z_{-1,-1}] =$	$\frac{h^8}{1260}(-23\zeta_{0,8} + 42\zeta_{2,6}) + \cdots$

Man bekommt oft einfachere (weniger Gitterpunkte benutzende) finite Ausdrücke mit demselben Annäherungsgrad wie bei den Ausdrücken der Operatorenrechnung, indem man direkt einen Ansatz macht:

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} g}{\partial x^\alpha\, y^\beta}\right)_{i,k} = \sum_{\varrho,\sigma} C_{\varrho,\sigma}\, g(x_i + \varrho h,\ y_k + \sigma l) + \vartheta D |g^{(s)}|_{\max} \tag{19·7}$$

und die noch unbekannten Konstanten $C_{\varrho,\sigma}$ daraus bestimmt, daß bei TAYLOR-Entwicklung der in (19·7) rechtsstehenden Summe Übereinstimmung bis zu den Gliedern $(s-1)$-ter Ordnung einschließlich stattfindet. In Tafel IX sind für die oft gebrauchten Differentialoperatoren

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \Delta\Delta \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

finite Ausdrücke angegeben.

19·4. Heranziehen der Differentialgleichung an mehreren Punkten. Das in 18·4 bis 18·6 beschriebene Verfahren läßt sich ebenfalls auf partielle Differentialgleichungen übertragen. Hier gilt in verstärktem Maße, daß bei einfach gebauten Differentialgleichungen mit dieser Methode oft gute Ergebnisse erzielt werden, während bei komplizierteren Differentialgleichungen die Durchführung viel mühsamer ausfällt als nach der Methode von 19·3.

Es werde wieder ein rechteckiges Gitter (19·1) zugrunde gelegt. Die Differentialgleichung laute wie in (6·1)

$$M[z] = \lambda N[z] \tag{19·8}$$

und sei von s-ter Ordnung, und zwar habe $M[z]$ die Gestalt

$$M[z] = \sum_{\nu=0}^{s} M_\nu[z] \quad \text{mit} \quad M_\nu[z] = \sum_{\substack{\alpha+\beta=\nu \\ \alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0}} p_{\alpha\beta}^{((\nu))} \frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}, \tag{19·9}$$

wobei die $p_{\alpha\beta}^{((\nu))}$ gegebene Funktionen von x, y sind. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

F a l l I. Die Koeffizienten $p_{\alpha\beta}^{((s))}$ des höchsten Gliedes $M_s[z]$ sind Konstanten. Dann werden entsprechend zu (18·9) Ausdrücke gebildet:

$$B = \sum_{i,k} \left(a_{ik} z_{i,k} + A_{ik} (M_s[z])_{i,k}\right), \tag{19·10}$$

wobei die Summe über eine noch genauer festzulegende Anzahl von Gitterpunkten zu erstrecken ist. Die a_{ik} und A_{ik} sind Konstanten. Nun wird der Ausdruck B an der Stelle eines Gitterpunktes nach dem TAYLORschen Satz entwickelt; die a_{ik} und A_{ik} sind dann aus der Forderung zu bestimmen, daß bei der TAYLOR-Entwicklung die Koeffizienten von

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}$$

für $\alpha + \beta \leq s + r$ mit $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ den Faktor Null erhalten. Dabei ist $r > 0$ zu wählen, im Fall $r = 0$ könnte man als B den gewöhnlichen Differenzenquotienten verwenden.

In dem so aufgestellten Ausdruck B wird $M_s[z]$ nach der Differentialgleichung (19·8) und (19·9) durch niedrigere Ableitungen ausgedrückt. So ergibt sich für die Näherungswerte Z_{ik} die Gleichung:

$$(19\cdot 11) \qquad \sum_{i,k} \left(a_{ik} Z_{i,k} + A_{ik} \left\{ \lambda N[z] - \sum_{\nu=0}^{s-1} M_\nu[z] \right\}_{z=Z_{i,k}} \right) = 0 .$$

In dieser Gleichung treten als Unbekannte die $Z_{i,k}$ und Werte $Z_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$ auf, die Näherungen für $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha\, y^\beta}\right)_{i,k}$ sein sollen. Eine Gleichung wie (19·11) wird für jeden inneren Gitterpunkt aufgeschrieben. Nun müssen noch die $Z_{ik}^{(\alpha,\beta)}$ mit $\alpha + \beta > 0$ eliminiert werden. Das geschieht, indem man ein für allemal Ausdrücke der Gestalt

$$(19\cdot 12) \qquad B^* = \sum_{i,k} \left(a_{ik}^* z_{ik} + A_{ik}^* \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}\right)_{ik} \right)$$

aufstellt, bei deren TAYLOR-Entwicklung die Koeffizienten von $\frac{\partial^{a+b} z}{\partial x^a\, \partial y^b}$ für $a + b \leq k + r$ den Faktor 0 enthalten. Dann werden die Gleichungen $B^* = 0$, indem man $Z_{i,k}$ für $z_{i,k}$ schreibt, mitbenutzt für alle Ableitungen $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}$, die in der Differentialgleichung (19·8) vorkommen.

Ebenso wie der Differentialgleichung werden den Randbedingungen entsprechende Gleichungen zwischen den $Z_{i,k}$ und $Z_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$ gegenübergestellt, wobei man oft bei den Randbedingungen Gleichungen niedrigerer Annäherung wird hinzunehmen müssen, um ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte zu erhalten.

Fall II. Die Koeffizienten $p_{\alpha,\beta}^{((s))}$ des höchsten Gliedes $M_s[z]$ in (19·9) sind nicht konstant, sondern ändern sich mit x und y. Dann kann man zwei Wege einschlagen. Entweder man stellt Gleichungen der Form $B^* = 0$ nach (19·12) für sämtliche in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen auf, auch für die Ableitungen s-ter Ordnung, und schreibt außerdem die Differentialgleichung für sämtliche inneren Gitterpunkte mit $Z_{ik}^{(\alpha,\beta)}$ an Stelle von $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}\right)_{i,k}$ auf, oder man verwendet Ausdrücke der Form

$$B^{**} = \sum_{i,k} \left(a_{ik}^{**} Z_{ik} + A_{ik}^{**} (M[z])_{i,k} \right),$$

wobei man jetzt die Koeffizienten a_{ik}^{**}, A_{ik}^{**} in jeder aufzustellenden Gleichung neu berechnen muß, da wegen der veränderlichen Koeffizienten (die selbst auch nach TAYLOR zu entwickeln sind) die TAYLOR-Entwicklung

für jeden inneren Gitterpunkt neu ausgeführt werden muß. Die Durchführung des Verfahrens kann dadurch sehr mühsam werden.

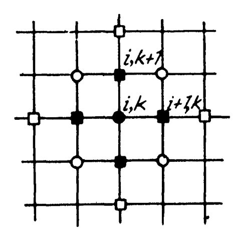
Wir erläutern das Verfahren bei der speziellen Gleichung (vgl. 6·2):

$$M[z] = -(p z_x)_x - (p z_y)_y + q z = \lambda g_0 z, \quad (19\cdot13)$$

die man auch in der Gestalt schreiben kann:

$$\Delta z \equiv z_{xx} + z_{yy} = -\frac{p_x}{p} z_x - \frac{p_y}{p} z_y + \frac{q}{p} z - \lambda \frac{g_0}{p} z. \quad (19\cdot14)$$

Jetzt haben die Glieder mit den höchsten Ableitungen, z_{xx} und z_{yy}, konstante Koeffizienten. Für Δz bekommt man an einer Gitterstelle x_i, y_k einen Ausdruck B der Form (19·10), indem man außer den vier in Abb. 19·4 durch ■ gekennzeichneten Nachbarstellen $(i+1, k)$ $(i-1, k)$ $(i, k+1)$ $(i, k-1)$,



Behandlung des Ausdruckes Δz:

●■ beim gewöhnlichen Differenzenverfahren benutzte Punkte,

●■□ beim Verfahren 19·3 (finiter Ausdruck) benutzte Punkte,

●■○ beim Verfahren 19·4 benutzte Punkte.

Abb. 19·4.

die bereits beim gewöhnlichen Differenzenquotienten (19·4) gebraucht werden, noch die in Abb. 19·4 durch ○ gekennzeichneten Punkte $(i+1, k+1)$, $(i+1, k-1)$, $(i-1, k+1)$, $(i-1, k-1)$ heranzieht und mit noch unbekannten Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_6$ unter Ausnutzung der Symmetrie ansetzt (bei gleichen Maschenweiten $h = l$):

$$(19\cdot15) \quad \left\{ \begin{aligned} B = {} & c_1 z_{ik} + c_2 (z_{i+1,k} + z_{i-1,k} + z_{i,k+1} + z_{i,k-1}) \\ & + c_3 (z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot) \\ & + c_4 \Delta z_{i,k} + c_5 (\Delta z_{i+1,k} + \Delta z_{i-1,k} + \Delta z_{i,k+1} + \Delta z_{i,k-1}) \\ & + c_6 (\Delta z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot). \end{aligned} \right.$$

Bei TAYLOR-Entwicklung findet man, daß man alle Glieder bis zu den partiellen Ableitungen 5. Ordnung einschließlich zum Verschwinden bringen kann, wobei nicht nur ein gemeinsamer Faktor bei den c_i, sondern noch eine weitere Freiheit bleibt. Man kann z. B. $c_6 = 0$ setzen und erhält dann

$$c_1 = -5 c_2 = -20 c_3 = \frac{5}{h^2} c_4 = \frac{c_5}{h^2}$$

oder noch einmal ausführlich angeschrieben

$$(19\cdot16)\quad \begin{cases} 40 z_{i,k} - 8(z_{i+1,k} + z_{i-1,k} + z_{i,k+1} + z_{i,k-1}) \\ \quad - 2(z_{i+1,k+1} + \cdots) + 8h^2 \Delta z_{i,k} + h^2(\Delta z_{i+1,k} + \cdots) \\ \qquad\qquad\qquad = \text{Restglied 6. Ordnung.} \end{cases}$$

Man veranschaulicht sich derartige Formeln bequem durch „Sterne“, bei denen man die Zahlenkoeffizienten von $Z_{i,k}$ und (etwa kursiv geschrieben) die von $\Delta Z_{i,k}$ einträgt:

$$\begin{array}{ccc} -2\,\bullet & -8\,\bullet_{\mathit{1}} & -2\,\bullet \\ -8\,\bullet_{\mathit{1}} & 40\,\bullet_{\mathit{8}} & -8\,\bullet_{\mathit{1}} \\ -2\,\bullet & -8\,\bullet_{\mathit{1}} & -2\,\bullet \end{array}$$

Denkt man sich für jeden inneren Gitterpunkt die Gleichung (19·16) mit Z statt z unter Fortlassen des Restgliedes angeschrieben und Δz nach der Differentialgleichung (19·14) ersetzt, so erhält man Gleichungen für die Z_{ik} und die Näherungswerte $Z_{ik}^{(1,0)}$ und $Z_{ik}^{(0,1)}$ für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{ik}$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{ik}$. Für diese kann man die Formeln aus Tafel VIII für gewöhnliche Ableitungen heranziehen, also z. B. für die y-Richtung:

$$Z_{i,k+1} - Z_{i,k-1} - \frac{h}{3}\left(Z_{i,k+1}^{(0,1)} + 4Z_{i,k}^{(0,1)} + Z_{i,k-1}^{(0,1)}\right) = 0\,,$$

und hat dann noch so viele Randbedingungen anzuschreiben, daß man ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte erhält.

19·5. Beispiele: Membranschwingungen. Beispiel I: Eingespannte Membran von der Gestalt eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks.

Abb. 19·5. Membran von der Gestalt eines gleichschenkligen Dreiecks.

Die Differentialgleichung lautet $-\Delta z = \lambda z$, und als Randbedingung hat man $z = 0$ am Rande eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete $l = 1$ (Abb. 19·5). Dieses Beispiel ist mit den gewöhnlichen Differenzenquotienten und mit finiten Ausdrücken behandelt bei G. SCHULZ[1]). Die Ergebnisse sind in der Tafel X mit angegeben. Hier sei daher das Verfahren von 19·4 beschrieben.

[1]) G. SCHULZ, Formelsammlung zur praktischen Mathematik, Sammlung Göschen, Berlin und Leipzig 1937, S. 139—141.

Bei der Maschenweite $h = \frac{1}{4}$ (Abb. 19·5) sind drei innere Punkte vorhanden. Die Funktionswerte nennen wir dort a, b, c. Bei Aufstellung der Differenzengleichungen (19·16) treten auch Punkte außerhalb des Dreiecks auf. Da auf dem Rande $z = 0$, also auch $\Delta z = 0$ ist und auf der Hypotenuse (Verwendung eines ξ-η-Achsensystems wie in der Abbildung) $z_{\xi\xi} = 0$ mithin auch $z_{\eta\eta} = 0$ ist, setzen wir z als ungerade Funktion fort und verwenden als Funktionswerte $-c$ und $-b$. Nun können die Differenzengleichungen (19·16) ohne weiteres angeschrieben werden, man erhält z. B. als erste Gleichung für den Punkt a:

$$40a - 8b - 8c + 8h^2 \cdot (-\Lambda \cdot a) + h^2(-\Lambda b - \Lambda c) = 0.$$

Insgesamt hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 40a - 8b - 8c - \frac{\Lambda a}{2} - \frac{\Lambda b}{16} - \frac{\Lambda c}{16} &= 0 \\ 42b - 8a - 2c - \frac{\Lambda b}{2} - \frac{\Lambda a}{16} &= 0 \\ 42c - 8a - 2b - \frac{\Lambda c}{2} - \frac{\Lambda a}{16} &= 0. \end{aligned}$$

Die Ausrechnung ergibt

$$\Lambda_2 = 88$$

$$\Lambda_{1,3} = \frac{32}{31}\left(84 \pm \sqrt{1352}\right) = \begin{cases} 48{,}7540 \\ 124{,}665 \end{cases}$$

Bei der Gleichung $-\Delta z = \lambda z$ kann man noch eine andere Gleichung aufstellen, die den gleichen Annäherungsgrad wie (19·16) besitzt, aber für die numerische Rechnung viel angenehmer ist. Man kann nämlich die in (19·15) noch bestehende Freiheit bei den Konstanten c_ϱ dazu benutzen, um die Verhältnisse $c_2 : c_3$ und $c_5 : c_6$ einander gleichzumachen; dann ergibt sich der Ausdruck

$$(19·17)\quad \begin{cases} B' = 20 Z_{i,k} - 4(Z_{i+1,k} + Z_{i-1,k} + Z_{i,k+1} + Z_{i,k-1}) \\ \qquad\qquad - (Z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot) \\ + \frac{h^2}{3}\Big[13\Delta Z_{i,k} + \frac{1}{4}\Big\{4(\Delta Z_{i+1,k} + \Delta Z_{i-1,k} + \Delta Z_{i,k+1} + \Delta Z_{i,k-1}) \\ \qquad\qquad + (\Delta Z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot)\Big\}\Big] = \text{Restglied 6. Ordnung}. \end{cases}$$

Bei Fortlassen des Restgliedes und Einsetzen von $\Delta Z_{i,k} = -\Lambda Z_{i,k}$ nimmt diese Gleichung mit

$$\Lambda = \frac{12(20 - \nu)}{h^2(52 + \nu)}$$

die Gestalt an

$$(19·18)\quad \begin{cases} \nu Z_{i,k} = 4(Z_{i+1,k} + Z_{i-1,k} + Z_{i,k+1} + Z_{i,k-1}) \\ \qquad + (Z_{i+1,k+1} + Z_{i+1,k-1} + Z_{i-1,k+1} + Z_{i-1,k-1}), \end{cases}$$

die außer den niedrigeren Koeffizienten gegenüber (19·16) den Vorteil hat, daß die Zahl ν nur beim Gliede $Z_{i,k}$ auftritt.

Tafel X. Ergebnisse des Differenzenverfahrens für die Dreiecks-Membran von 19·5.

			Gewöhnliches Differenzenverfahren nach (19·1)						Finite Ausdrücke nach (19·3)			Finite Ausdrücke nach (19·18)			Finite Ausdrücke nach (19·16)	
Anzahl der inneren Gitterpunkte			1	3	6	10	15	21	1	3	6	1	3	6	1	3
Exakter Eigenwert		Eigenfunktion	$h=\frac{1}{3}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{5}$	$h=\frac{1}{6}$	$h=\frac{1}{7}$	$h=\frac{1}{8}$	$h=\frac{1}{3}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{5}$	$h=\frac{1}{3}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{5}$	$h=\frac{1}{3}$	$h=\frac{1}{4}$
$\lambda_1 = 5\pi^2$	49,3480	sym.	36	41,37	44,10	45,646	46,604	47,23	43,5	47,163	48,381	44,471	47,763	48,700	47,25	48,754
$\lambda_2 = 10\pi^2$	98,696	antim.		64	75	81,65	85,90	88,76		80	89,583		84,48	92,727		88
$\lambda_3 = 13\pi^2$	128,31	sym.		86,63	} 100	108	113,1	116,5		107,5	118,26		106,30	118,46		124,67
$\lambda_4 = 17\pi^2$	167,78	sym.				117,6	129,5	137,7			127,6			137,41		
$\lambda_5 = 20\pi^2$	197,39	antim.			125	144	156,7	165,5			156,25			159,57		
$\lambda_6 = 25\pi^2$	246,74	sym.			155,9	170,4	196	207,0			197,5			190,29		
$\lambda_7 = 26\pi^2$	256,61	antim.				144	168,8	186,7								
$\lambda_8 = 29\pi^2$	286,22	sym.				180	196	214,5								
$\lambda_9 = 34\pi^2$	335,57	antim.				206,4	223,2	256								
$\lambda_{10} = 37\pi^2$	365,18	sym.				242,4	196	228,2								
$\lambda_{11} = 40\pi^2$	394,78	antim.					235,3	256								
$\lambda_{12} = 41\pi^2$	404,65	sym.					262,5	283,8								
$\lambda_{13} = 45\pi^2$	444,13	sym.					279	297,5								

Bei der Maschenweite $h = \frac{1}{4}$ (Abb. 19·5) und der Bezeichnung der Funktionswerte mit a, b, c wie oben erhält man nach (19·18) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nu a &= 4b + 4c, \\ \nu b &= 4a + c - b, \\ \nu c &= 4a + b - c \end{aligned}$$

und daraus $\nu_2 = -2$; $\nu_{1,3} = \pm 4\sqrt{2}$.

Die Tafel X gibt eine Gegenüberstellung der nach den verschiedenen Verfahren erhaltenen Näherungswerte.

Beispiel II: Eingespannte Membran von der Gestalt eines Rhombus mit einem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{3}$ (Abb. 19·6).

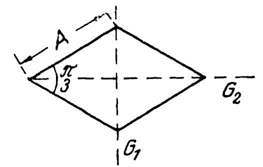


Abb. 19·6. Rhombusmembran.

Hier empfiehlt es sich, nicht rechteckige Netze von Gitterpunkten, sondern Netze von regelmäßigen Sechsecken oder Dreiecken zu verwenden.

Die Kantenlänge des Rhombus sei A; wir haben wieder die Differentialgleichung

$$-\Delta z = \lambda z$$

und die Randbedingung $z = 0$ am Rhombusrande.

In einem Sechsecksnetz erhält man bei einer Bezeichnungsweise der Funktionswerte mit z_0, z_1, z_2, z_3 wie in Abb. 19·7 bei TAYLOR-Entwicklung

$$z_1 + z_2 + z_3 - 3z_0 = \frac{3h^2}{4}\Delta z_0 + \frac{\vartheta h^3}{3} m_3,$$

wobei $|\vartheta| \leq 1$ ist und m_3 den Maximalbetrag der dritten partiellen Ableitungen von z auf den drei Strecken vom Punkte 0 zu den Punkten 1, 2, 3 bedeutet (h = Sechsecksseitenlänge).

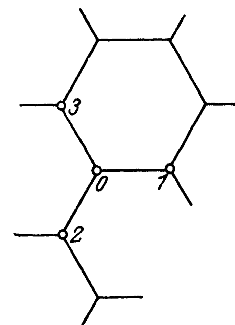


Abb. 19·7. Sechsecksnetz.

Bei der Differentialgleichung $\Delta z = -\lambda z$ lautet also mit $\Lambda = \frac{4}{3}\frac{3-\nu}{h^2}$ die Differenzengleichung

(19·19) $$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \nu Z_0.$$

Man kann auch bei größerer Anzahl innerer Gitterpunkte das Differenzenverfahren noch mit erträglichem Rechenaufwand durchführen, besonders wenn man Symmetrien ausnutzen kann[1]).

[1]) Man kann „Symmetrische Ansätze" und „Antimetrische Ansätze" mit wesentlich verringerten Anzahlen der Unbekannten machen, vgl. L. COLLATZ, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934) 316.

Tafel XI. Ergebnisse des Differenzenverfahrens

Gitter			Sechsecksnetze, parallel den Rhombusseiten											
Anzahl der inneren Gitterpunkte			2		6		10		16		24		32	
Maschenweite			$h=\frac{1}{3}A$		$h=\frac{1}{4}A$		$h=\frac{1}{5}A$		$h=\frac{1}{6}A$		$h=\frac{1}{7}A$		$h=\frac{1}{8}A$	
Symmetrie bezüglich		$\lambda_i A^2$	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2
G_1, G_2		24,82	1	24	2	21,3	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	23,24	2,499	24,06	2,634	23,91	2,7157	24,23
G_2		$16\frac{\pi^2}{3}=52,64$			1	42,7	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	46,07	2	48	2,247	49,20	$1+\sqrt{2}$	49,99
G_1			−1	48			$\frac{\sqrt{13}-1}{2}$	56,57	1,662	64,22	2,029	63,44	2,222	66,42
G_1, G_2					−1	85,3	1	66,7	1,495	72,2	1,860	74,5	2,097	77,1
		$\frac{112\pi^2}{9}=122,8$					$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	79,4	1	96	$\sqrt{2}$	103,6	$\sqrt{3}$	108,2
G_2							$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	120,6						
G_1, G_2							$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	143,4	0,425	123,5	1,331	109	1,594	120
G_1					−2	106,7	−1	133,3	0,758	108	1,123	122,6	1,363	139,7
G_1, G_2									−0,758	180	1	130,7	1,353	140,5
G_1		$\frac{64\pi^2}{3}=210,6$							−1	192	0,555	160	1	170,7
G_1							$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	177	−0,425	164	0,673	152		
G_2							$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	154	−1	192	0,802 −0,802	143,5 249		
G_1, G_2									−1,66	224	−0,673	240	0,632	202
G_1, G_2											−1,123	269	−0,806	324
G_1									−2,499	264	−1	261,3	0,806	187
									−2	240	−0,555	232	$\sqrt{2}-1$	221

für die Rhombus-Membran von 19·5.

Sechsecksnetze, anders gelegen						Dreiecksnetze					
2		8		6		4		9		16	
$h=\frac{1}{5}A\sqrt{3}$		$h=\frac{1}{8}A\sqrt{3}$		$h=\frac{1}{4}A$		$h=\frac{1}{3}A$		$h=\frac{1}{4}A$		$h=\frac{1}{5}A$	
ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2	ν	ΛA^2
1	22,22	2,170	23,6	$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	22,79	$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$	24,080	3,8951	24,611	4,6024	24,734
−1*	44,4	1,481	43,2	1	42,7	0	48	2	51,2	$1+\sqrt{5}$	52,061
		1	56,9	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	53,0	−1	59,29	1	67,37	2,432	69,85
		0,311	76,4	$\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	75,0	$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$	66,24	0,397	77,96	1,943	81,37
		−1	114	−1	85,3			−1	105,41	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	115,6
		−0,311	94								
		−1,481	127	$\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	105,2			−1,292	111,7	0,183	128,0
								−2	128	−0,580	151,1
									128	−0,578	151,0
		−2,17	147							$1-\sqrt{5}$	172,7
										−1,521	182,6
										$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	186,0
										−1,84	194
										−2,307	212
										2,332	213

Tafel XI zeigt die Ergebnisse der mit verschiedenen Maschenweiten und verschiedenen Lagen der Sechsecksnetze durchgeführten Differenzenverfahren. Bezeichnet man die Rhombusdiagonalen mit G_1, G_2 (Abb. 19·6), so sind alle Eigenfunktionen zu G_1 symmetrisch oder antimetrisch, ebenso bezüglich G_2, abgesehen von den zu mehrfachen Eigenwerten gehörigen, bei denen man durch Linearkombination unsymmetrische Schwingungsformen erzeugen kann, z. B. ist die Schwingungsform in Abb. 19·8, wo die Knotenlinien eingezeichnet sind, zu G_2 weder symmetrisch noch antimetrisch. Die zu G_1 antimetrischen Schwingungsformen sind zugleich Eigenschwingungen des gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge A; diese lassen sich in geschlossener Form angeben[1]) und gehören zu den Eigenwerten

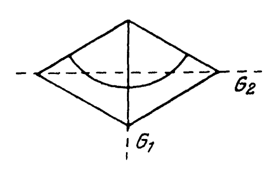


Abb. 19·8. Zu den Symmetrien der Schwingungsformen.

$$\left(\frac{4\pi}{3A}\right)^2 (\mu^2 + \mu\varrho + \varrho^2),$$

wo μ, ϱ beliebige positive ganze Zahlen sind.

So lassen sich durch Feststellen der Schwingungsformen die Differenzeneigenwerte bestimmten Schwingungsformen zuordnen, und man kann aussagen: Eine herausgegriffene Differenzeneigenlösung ist Näherung für eine ganz bestimmte Eigenlösung des Differentialgleichungsproblems.

Bei Betrachten der Tabelle XI fallen insbesondere die beiden Tatsachen bei unserem Beispiel auf:

1. Bei n inneren Gitterpunkten sind die erhaltenen Näherungen $\Lambda_1^{(n)}, \Lambda_2^{(n)}, \ldots, \Lambda_n^{(n)}$ keineswegs Näherungen für die ersten n Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, sondern für gewisse n Eigenwerte $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots, \lambda_{k_n}$. Sogar die Reihenfolge kann bei den Näherungswerten eine andere sein als bei den exakten Eigenwerten (z. B. bei dem Sechsecksnetz mit $h = \frac{1}{5} A$ die Näherungen 143,4 und 133,3 für den siebenten und achten Eigenwert). Bei den höheren Eigenwerten besteht daher eine Unsicherheit in der Reihenfolge, die nur durch genauere Rechnungen, insbesondere mit kleineren Maschenweiten, behoben werden könnte.

2. Die Konvergenz der Differenzeigenwerte $\Lambda_i^{(n)}$ gegen λ_i bei wachsendem n ist keineswegs monoton, wie man bereits beim ersten Eigenwert λ_1 feststellt. Dabei sind die Sechsecksnetze nicht willkürlich, sondern ganz gesetzmäßig in den Rhombus gelegt, derart, daß die Endpunkte der längeren Rhombusdiagonale Mittelpunkte von Sechsecken sind.

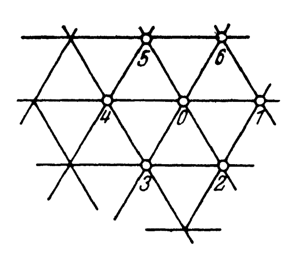


Abb. 19·9. Dreiecksnetz.

An Stelle von Sechsecksnetzen kann man auch Dreiecksnetze verwenden; wir bezeichnen die Funktionswerte mit $z_0, z_1, \ldots, z_6$ wie in Abb. 19·9. TAYLOR-Entwicklung liefert

$$(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 - 6z_0) = \frac{3h^2}{2} \Delta z_0 + \vartheta \frac{3}{8} h^4 m_4$$

[1]) F. POCKELS, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, S. 148—155.

mit $|\vartheta| \leq 1$; m_4 ist Maximalbetrag der vierten partiellen Ableitungen von z auf den sechs Strecken der Länge h vom Punkte 0 zu den Punkten 1, 2, ..., 6. Bezeichnet man die Näherungswerte mit Λ^*, ersetzt also Δz_0 durch $-\Lambda^* z_0$, so lauten die Differenzengleichungen mit $\Lambda^* = \frac{2(6-\nu)}{3h^2}$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 = \nu Z_0 .$$

Man kann bei den Dreiecksnetzen auch ein genaueres Verfahren verwenden:

Das in 19·4 beschriebene verbesserte Differenzenverfahren geht aus von der TAYLOR-Entwicklung

$$\sum_{i=1}^{6} z_i - 6 z_0 - \frac{h^2}{16}\left(\sum_{i=1}^{6} \Delta z_i + 18 \Delta z_0\right) = \text{Restglied 6. Ordnung.}$$

Bezeichnet man jetzt die Näherungswerte mit Λ^{**}, ersetzt also Δz_i durch $-\Lambda^{**} Z_i$, so nehmen die Differenzengleichungen mit $\Lambda^{**} = \frac{16}{h^2}\,\frac{6-\nu}{18+\nu}$ die Gestalt an:

$$\sum_{i=1}^{6} Z_i = \nu Z_0 . \tag{19·20}$$

Die Differenzengleichungen und damit die Werte ν und die Differenzeneigenfunktionen sind also hier beim verbesserten Verfahren genau dieselben wie beim gewöhnlichen Differenzenverfahren, nur die Näherungswerte Λ^* und Λ^{**} fallen verschieden aus, und zwar ist für $|\nu| < 6$ (bei der Randbedingung $z = 0$ folgt $|\nu| < 6$ aus bekannten Abschätzungen über die charakteristischen Zahlen von Matrizen[1]) wegen $\frac{16}{18+\nu} > \frac{2}{3}$:

$$\Lambda^{**} > \Lambda^* .$$

19·6. Vermischte Übungsaufgaben zum sechsten Kapitel. 1. Man berechne Eigenwerte und Eigenfunktionen von

$$-y'' = \lambda(1 + x^2)y,$$
$$y(-1) = y(1) = 0,$$

angenähert nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren.

Rechnung mit der Maschenweite $h = \frac{1}{3}$. Man macht zunächst einen symmetrischen Ansatz $Y(ih) = Y(-ih)$ und erhält für $\Lambda = 81\mu$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} -2+9\mu & 2 & 0 \\ 1 & -2+10\mu & 1 \\ 0 & 1 & -2+13\mu \end{vmatrix} = 1170\mu^3 - 674\mu^2 + 93\mu - 2 = 0$$

[1]) ν ist dann charakteristische Zahl einer Matrix, bei der nach (19·20) in jeder Zeile nur Nullen und eine Anzahl Einsen stehen, und zwar 6 Einsen, wenn alle Nachbarpunkte zu dem betrachteten Gitterpunkt innere Gitterpunkte sind, andernfalls weniger als 6 Einsen. Daraus folgt $|\nu| \leq 6$ nach einem Satz der Algebra, H. WITTMEYER, Z. angew. Math. Mech. 16 (1936) 291, Gl. (3).

mit

$$\Lambda_1 = 2{,}1290; \quad \Lambda_3 = 13{,}9; \quad \Lambda_5 = 30{,}6.$$

Ein antimetrischer Ansatz: $Y(ih) = -Y(-ih)$ liefert

$$\begin{vmatrix} -2+10\mu & 1 \\ 1 & -2+13\mu \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \Lambda = \frac{81}{130}\left(23 \pm \sqrt{139}\right)$$

$$\Lambda_2 = 6{,}98; \quad \Lambda_4 = 21{,}6.$$

Abb. 19·10 zeigt die zugehörigen ersten fünf Differenzeneigenlösungen.

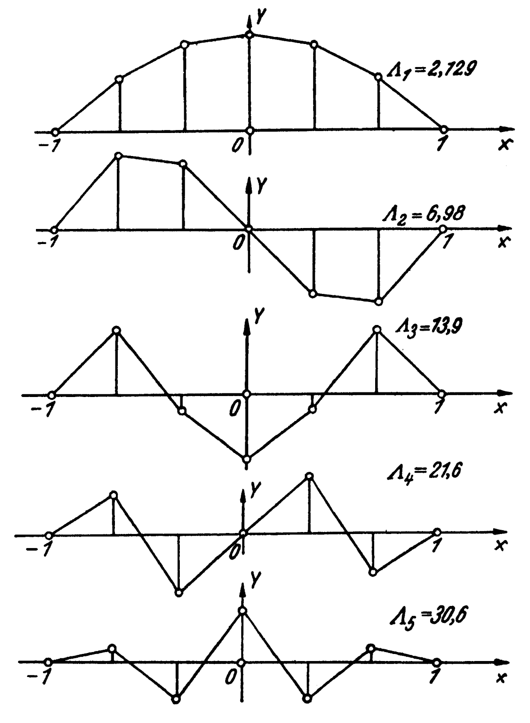


Abb. 19·10. Die ersten fünf Differenzen-Eigenlösungen zu Aufgabe 1 aus 19·6.

2. Man vergleiche die nach dem Verfahren höherer Annäherung in 18·2 (nach Formel (18·2)) berechneten Näherungswerte Λ für

$$-y'' = \lambda y; \quad y(0) = y'(1) = 0$$

mit den exakten Werten.

Rechnung mit der Maschenweite $h = \frac{1}{4}$. Mit $\frac{3}{4}\Lambda - 30 = 2\mu$ erhält man

$$4\mu^4 - 1028\mu^2 - 1024\mu + 32257 = 0.$$

μ	Λ	Exakter Wert	Fehler von Λ
— 14,0750	2,4667	$\lambda_1 = \frac{1}{4}\pi^2 = 2,46740$	— 0,026%
— 6,8300	21,787	$\lambda_2 = 9\lambda_1$	— 1,8%
5,4158	54,44	$\lambda_3 = 25\lambda_1$	— 12%
15,489	81,30	$\lambda_4 = 49\lambda_1$	— 33%

3. Man berechne den ersten Eigenwert λ_1 von

$$-y'' = \lambda x y; \quad y(0) = y(1) = 0$$

nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren des § 17, nach dem Verfahren höherer Annäherung (Formel (18·2)) und nach dem Verfahren von 18·4 (Benutzung der Formel (18·10)).

Ergebnis: Die Näherungswerte für den Eigenwert $\lambda_1 = 18,9563$ sind:

Maschenweite $h =$	Gewöhnliches Differenzenverfahren nach § 17		Verfahren nach (18·2)		Verfahren nach 18·4	
	Λ_1	Fehler	Λ_1	Fehler	Λ_1	Fehler
$\frac{1}{2}$	16	— 16%	18,67	— 1,5%	19,2	+ 1,3%
$\frac{1}{3}$	17,12	— 9,6%	18,703	— 1,3%	18,890	— 0,35%
$\frac{1}{4}$	17,871	— 5,7%	18,858	— 0,52%	18,9288	— 0,15%
$\frac{1}{5}$	18,251	— 3,7%	18,9129	— 0,23%		
$\frac{1}{6}$	18,463	— 2,6%				

4. Man löse die Differenzengleichungen des § 17 und des Verfahrens höherer Annäherung von 18·2 für das bereits in Aufgabe 6 von 14·6 behandelte Problem

$$y^{IV} = -\lambda y''; \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

für beliebige Schrittzahl n in geschlossener Form und vergleiche sie mit der exakten Lösung. Es sollen nur die zu $x = 0$ symmetrischen Lösungen untersucht werden.

Ergebnis: Bei der Maschenweite $h = \frac{2}{n}$ lassen sich Lösungen der gewöhnlichen Differenzengleichungen

$$\frac{1}{h^4}\Delta^4 Y_{i-2} = -\Lambda \frac{1}{h^2}\Delta^2 Y_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

mit den Randbedingungen

$$Y_0 = Y_n = 0; \quad Y_{-1} = Y_1; \quad Y_{n-1} = Y_{n+1}$$

in geschlossener Form angeben:

$$Y_i = 1 - \cos k\pi i h \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$$

Dabei ist $Y_0, Y_1, \ldots$ von der linken Randstelle $x = -1$ aus gezählt (Abb. 19·11), und $k = 1$ bedeutet die erste, $k = 2$ die zweite Differenzeneigenlösung usf. bis $k = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

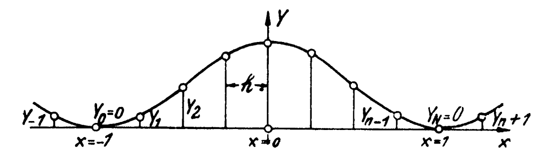


Abb. 19·11. Das Differenzenverfahren liefert die Gestalt der Eigenfunktionen von $y^{IV} = -\lambda y''$, $y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$ fehlerfrei.

Die Werte Y_i stimmen überein mit denen, die eine exakte Eigenfunktion

$$y_k(x) = (-1)^{k-1} + \cos k\pi x \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

an den Stellen $x_i = -1 + ih = -1 + \frac{2i}{n}$ annimmt. Das Differenzenverfahren liefert also in diesem Beispiel die Gestalt der Eigenfunktionen ohne Fehler. Dagegen zeigen die Differenzeneigenwerte

$$\Lambda_k^{(n)} = \frac{n^2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)}{2}$$

von den exakten Eigenwerten $\lambda_k = k^2\pi^2$ Abweichungen

$$\Lambda_k^{(n)} - \lambda_k = -\frac{k^4\pi^4 h^2}{12} + \text{höhere Potenzen von } h^2,$$

die also mit h quadratisch gegen Null gehen.

Bei Benutzung von finiten Ausdrücken nach 18·2, 18·3 lauten die Differenzengleichungen

$$\frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 Y_{i-2} - \frac{1}{6}\Delta^6 Y_{i-3}\right) = -\Lambda \cdot \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 Y_{i-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 Y_{i-2}\right)$$

mit den Randbedingungen

$$Y_0 = Y_n = 0; \quad Y_1 = Y_{-1}; \quad Y_2 = Y_{-2}; \quad Y_{n-1} = Y_{n+1}; \quad Y_{n-2} = Y_{n+2}.$$

Die Differenzeneigenlösungen sind genau dieselben wie oben beim gewöhnlichen Differenzenverfahren, aber die Differenzeneigenwerte

$$\Lambda_k^{(n)} = \frac{\xi}{h^2}\,\frac{1 + \frac{\xi}{6}}{1 + \frac{h}{12}} \quad \text{mit} \quad \xi = 2(1 - \cos k\pi h)$$

konvergieren jetzt stärker gegen die exakten Eigenwerte λ_k, ihre Abweichungen

$$\Lambda_k^{(n)} - \lambda_k = -\frac{13}{720}k^6\pi^6 h^4 + \text{höhere Potenzen von } h^2$$

gehen mit der vierten Potenz von h gegen Null.

5. **Von allen am Rande eingespannten Membranen gleicher Dicke, gleicher Dichte, gleicher Spannung und gleich großer Oberfläche hat die kreisförmige Membran den tiefsten Grundton, aber es gibt unter diesen Membranen keine mit dem**

höchsten Grundton. Bei dem entsprechenden finiten Problem hat dagegen die Frage nach dem höchsten Grundton eine einfache Antwort.

$\mathfrak{G}$ sei in einem quadratischen Netz ((19·1) mit $h = l = 1$) ein endlicher einfach zusammenhängender Gitterbereich, begrenzt von einem Randpolygon Γ, das sich aus Gittergeradenstücken (Verbindungsgeraden benachbarter Gitterpunkte) zusammensetzt. Die Gitterpunkte von $\mathfrak{G}$ werden eingeteilt in die auf Γ liegenden Randpunkte und in die nicht auf Γ liegenden inneren Gitterpunkte. Weiter werde vorausgesetzt, daß auch die inneren Gitterpunkte einen einfach zusammenhängenden Gitterbereich bilden; dadurch werden Bereiche wie in Abb. 19·12 ausgeschlossen. Nun werden alle Bereiche, die den genannten Voraussetzungen genügen und eine feste Anzahl N von inneren Gitterpunkten haben, verglichen und für jeden Bereich das Differenzeneigenwertproblem nach (19·5)

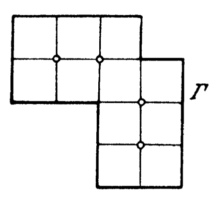


Abb. 19·12. Zur Frage nach dem einfachen Zusammenhang des Bereichs der inneren Gitterpunkte.

(19·21) $\quad \nu Z_{i,k} = (4 - \Lambda h^2) Z_{i,k} =$ Summe der vier Nachbarwerte von $Z_{i,k}$ in inneren Punkten (i, k)

$Z_{i,k} = 0$ in Randpunkten (i, k)

gebildet. Zu jedem Gitterbereich $\mathfrak{G}$ gehört dann ein ganz bestimmtes „Spektrum", d. h. eine Anzahl von Differenzeneigenwerten $\Lambda_{(\mathfrak{G})}$ und insbesondere ein kleinster Eigenwert $\Lambda_{1(\mathfrak{G})}$. Man beweise, daß $\Lambda_{1(\mathfrak{G})}$ am größten ausfällt, wenn der Gitterbereich gestreckt ist, wenn also jeder innere Gitterpunkt höchstens zwei andere innere Gitterpunkte zu Nachbarn hat; Abb. 19·13 zeigt für $N = 5$ diese „gestreckte Form" in zwei Ausführungsarten, die natürlich dasselbe Spektrum haben.

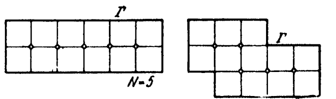


Abb. 19·13. Gitterbereich in „gestreckter Form" mit größtem Λ.

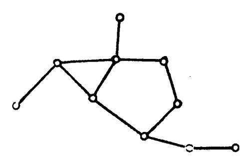
Der Beweis läßt sich mit Hilfe der Minimaleigenschaften von $\Lambda_{1(\mathfrak{G})}$ erbringen. Die Gitterpunkte von $\mathfrak{G}$ werden in irgendeiner Reihenfolge mit $P_1, P_2, \ldots$ bezeichnet. Ist w eine in den Randpunkten verschwindende und in den inneren Gitterpunkten irgendwelche reellen Werte annehmende Gitterfunktion, und setzt man $w(P_i) = w_i$, so gilt

$$(19\cdot 22) \qquad \Lambda_{1(\mathfrak{G})} \leq \frac{\sum\limits_{P_i P_k \text{ benachbart}} (w_i - w_k)^2}{\sum\limits_i w_i^2}.$$

Das Gleichheitszeichen steht, wenn w_i Werte der ersten Differenzeneigenfunktion sind.

Tafel XII gibt die Differenzeneigenwerte für Gitterbereiche bis zu $N = 6$ inneren Gitterpunkten, geordnet nach der Größe des kleinsten Eigenwertes.

Entsprechend kann man für einen beliebigen „Graphen" (Abb. 19·14) das „Spektrum" der Eigenwerte aufstellen, indem man die Knoten von 1 bis N durchnumeriert, Funktionswerte in den Knoten mit


Abb. 19·14. Zum „Spektrum" eines Graphen.

Tafel XII. Spektren der Gitterbereiche bis zu $N = 6$ inneren Gitterpunkten.

N	Lage der inneren Gitterpunkte (nur die topologisch verschiedenen Fälle)	Gleichung für ν	Wurzeln ν	Zahlenwerte ν, danach $\Lambda = \frac{4-\nu}{h^2}$
1		$\nu = 0$	0	0
2		$\nu^2 - 1 = 0$	± 1	± 1
3		$\nu^3 - 2\nu = 0$	$\pm\sqrt{2}$, 0	$\pm 1{,}4142$; 0
4		$\nu^4 - 4\nu^2 = 0$	± 2, 0, 0	± 2; 0; 0
		$\nu^4 - 3\nu^2 = 0$	$\pm\sqrt{3}$, 0, 0	$\pm 1{,}7321$; 0, 0
		$\nu^4 - 3\nu^2 + 1 = 9$	$\pm\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$\pm 1{,}6180$; $\pm 0{,}6180$
5		$\nu^5 - 5\nu^3 + 2\nu = 0$	$\pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}}$, 0	$\pm 2{,}1358$; $\pm 0{,}6622$; 0
		$\nu^5 - 4\nu^3 = 0$	± 2; 0, 0, 0	± 2; 0; 0; 0
		$\nu^5 - 4\nu^3 + 2\nu = 0$	$\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$, 0	$\pm 1{,}8478$; $\pm 0{,}7654$; 0
		$\nu^5 - 4\nu^3 + 3\nu = 0$	$\pm\sqrt{3}$; ± 1; 0	$\pm 1{,}7321$; ± 1; 0

6		$\nu^6 - 7\nu^4 + 7\nu^2 - 1 = 0$	$\pm 1 \pm \sqrt{2}; \pm 1$	$\pm 2{,}4142;\ \pm 1;\ \pm 0{,}4142$
		$\nu^6 - 6\nu^4 + 4\nu^2 = 0$	$\pm \frac{1 \pm \sqrt{5}}{\sqrt{2}};\ 0,\ 0$	$\pm 2{,}2883;\ \pm 0{,}8740;\ 0;\ 0$
		$\nu^6 - 6\nu^4 + 5\nu^2 - 1 = 0$	$\pm \frac{1}{2\cos\frac{k\pi}{7}}$ für $k = 1, 2, 3$	$\pm 2{,}2470;\ \pm 0{,}8019;\ \pm 0{,}5550$
		$\nu^6 - 6\nu^4 + 5\nu^2 = 0$	$\pm \sqrt{5};\ \pm 1;\ 0,\ 0$	$\pm 2{,}2361;\ \pm 1;\ 0,\ 0$
		$\nu^6 - 6\nu^4 + 6\nu^2 - 0$	$\pm \sqrt{3 \pm \sqrt{3}};\ 0,\ 0$	$\pm 2{,}1753;\ \pm 1{,}1260;\ 0;\ 0$
		$\nu^6 - 5\nu^4 + 3\nu^2 = 0$	$\pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}};\ 0,\ 0$	$\pm 2{,}0743;\ \pm 0{,}8350;\ 0;\ 0$
		$\nu^6 - 5\nu^4 + 4\nu^2 = 0$	$\pm 2;\ \pm 1;\ 0,\ 0$	$\pm 2;\ \pm 1;\ 0;\ 0$
		$\nu^6 - 5\nu^4 + 5\nu^2 - 1 = 0$	$\pm \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}};\ \pm 1$	$\pm 1{,}9319;\ \pm 1;\ \pm 0.5176$
		$\nu^6 - 5\nu^4 + 5\nu^2 = 0$	$\pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}};\ 0,\ 0$	$\pm 1{,}9021;\ \pm 1{,}1756;\ 0;\ 0$
		$\nu^6 - 5\nu^4 + 6\nu^2 - 1 = 0$	$\pm 2\cos\frac{k\pi}{7}$ für $k = 1, 2, 3$	$\pm 1{,}8019;\ \pm 1.2470;\ \pm 0.4450$

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ bezeichnet und für jeden Knoten eine Gleichung

(19·23) $\nu Z_i =$ Summe der Z-Werte in den benachbarten Knoten $(i = 1, 2, \ldots, N)$

aufstellt. Die Determinante dieses homogenen Gleichungssystems für die Z_i, gleich Null gesetzt, stellt eine algebraische Gleichung N-ten Grades dar für die Zahlen ν, die das Spektrum bilden.

6. Man stelle für das in 18·4 beschriebene Differenzenverfahren des Heranziehens der Differentialgleichung an mehreren Punkten Ausdrücke der Form (18·9) für eine beliebige (k-te) Ableitung auf, wobei man von den $a_{i-p}, \ldots, a_{i+p}$ die Werte für $p = \left[\frac{k+1}{2}\right]$ (d. h. $p = \frac{k}{2}$ für gerades k und $p = \frac{k+1}{2}$ für ungerades k) und von den A_ν die Werte A_{i-1}, A_i, A_{i+1} verwendet.

Ergebnis: Für gerades k erhält man bei Taylor-Entwicklung

$$\Delta^k y_{-\frac{k}{2}} - \frac{k h^k}{24}\left(y_{-1}^{(k)} + \left(\frac{24}{k} - 2\right) y_0^{(k)} + y_1^{(k)}\right) = C_k h^{k+4} y^{(k+4)} + \text{höhere Ableitungen}$$

und für ungerades k

$$\Delta^k \left(y_{-\frac{k+1}{2}} + y_{-\frac{k-1}{2}}\right) - \frac{k+3}{12} h^k \left(y_{-1}^{(k)} + \left(\frac{24}{k+3} - 2\right) y_0^{(k)} + y_1^{(k)}\right) = C_k h^{k+4} y^{(k+4)} + \text{höhere Ableitungen},$$

wobei C_k eine Konstante ist.

7. Man vergleiche für das Eigenwertproblem

$$-\left(\frac{y'}{1+x}\right)' = \lambda y; \quad y(0) = y(1) = 0$$

zwei Arten des gewöhnlichen Differenzenverfahrens miteinander, indem man einmal ausdifferenziert und die Ableitungen y', y'' nach (17·1) (17·2) ersetzt, also mit $p(x) = \frac{1}{1+x}$, $p_i = p(x_i)$, $p_i' = p'(x_i) = -\frac{1}{(1+x_i)^2}$ die Gleichungen

$$p_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i' \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \Lambda y_i = 0 \qquad (19·24)$$

verwendet, und das andere Mal nach (17·8) die Gleichungen

$$p_{i+\frac{1}{2}} y_{i+1} - \left(p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}\right) y_i + p_{i-\frac{1}{2}} y_{i-1} + \Lambda h^2 y_i = 0 \qquad (19·25)$$

benutzt. Man erhält in diesem Beispiel nach (19·25) etwas bessere Werte:

Maschenweite $h =$	Rechnung nach (19·24)	Fehler	Rechnung nach (19·25)	Fehler
$\frac{1}{2}$	$\Lambda_1^{(2)} = 5{,}333$	-21%	$\Lambda_1^{(2)} = 5{,}486$	-19%
$\frac{1}{3}$	$\Lambda_1^{(3)} = 6{,}075$ $\Lambda_2^{(3)} = 18{,}23$	-10% -32%	$\Lambda_1^{(3)} = 6{,}150$ $\Lambda_2^{(3)} = 18{,}47$	-9% -31%
$\frac{1}{4}$	$\Lambda_1^{(4)} = 6{,}371$ $\Lambda_2^{(4)} = 21{,}35$ $\Lambda_3^{(4)} = 37{,}50$	-6% -20% -37%	$\Lambda_1^{(4)} = 6{,}415$ $\Lambda_2^{(4)} = 21{,}50$ $\Lambda_3^{(4)} = 37{,}81$	-5% -19% -37%

7. Kapitel.

Verschiedene andere Verfahren.

§ 20. Störungsrechnung.

Die Methode der Störungsrechnung läßt sich oft mit gutem Erfolg anwenden, wenn man zu dem zu lösenden Eigenwertproblem ein selbstadjungiertes „benachbartes" Problem, d. h. ein Problem mit wertemäßig wenig abgeänderten Koeffizienten in der Differentialgleichung und mit denselben Randbedingungen, angeben kann, dessen Lösung man kennt.

20·1. Beschreibung des Verfahrens. Das vorgelegte Eigenwertproblem laute

(20·1) $$M[y] = \lambda N[y]$$

mit den Randbedingungen

(20·2) $$U_\mu[y] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Wir beschreiben die Methode der Einfachheit halber für den Fall einer unabhängigen Veränderlichen x, sie gilt genau so für partielle Differentialgleichungen und mehrere unabhängige Veränderliche, man hat dann jeweils die Integrale über das gesamte Grundgebiet zu erstrecken.

Von einem anderen Eigenwertproblem,

(20·3) $$M^*[y] = \lambda^* N^*[y],$$

(20·2) $$U_\mu[y] = 0,$$

das dieselben Randbedingungen wie das Ausgangsproblem hat, dessen Differentialgleichung (20·3) wertmäßig etwas andere Koeffizienten wie (20·1) hat, sei die n-te Eigenfunktion, die wir $y_n^* = y_{n,0}$ nennen, bekannt; sie gehöre zum Eigenwert $\lambda_n^* = \lambda_{n,0}$. Das Problem mit der bekannten Lösung $y_{n,0}$ heißt dann das „ungestörte" Problem und das zu lösende Problem (20·1), (20·2) das „gestörte" Problem mit den Störungsgliedern

(20·4) $$\begin{cases} \overline{M}[y] = M[y] - M^*[y], \\ \overline{N}[y] = N[y] - N^*[y]. \end{cases}$$

Von dem ungestörten Problem (20·3), (20·2) setzen wir voraus, daß es selbstadjungiert sei, daß also die Gleichungen (4·9) erfüllt sind und daß für seine Eigenfunktionen $y_{n,0}$

$$\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}]\,dx > 0$$

sei; das gestörte Problem dagegen braucht für die hier durchzuführenden Untersuchungen nicht selbstadjungiert zu sein.

Nun wird der „Störungsparameter" ε eingeführt und die einparametrige Schar von Eigenwertproblemen gebildet:

$$(20\cdot5)\qquad \begin{cases} M^*[y] + \varepsilon \bar{M}[y] = \lambda\{N^*[y] + \varepsilon \bar{N}[y]\} \\ U_\mu[y] = 0 \qquad\qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Dann entspricht $\varepsilon = 0$ dem ungestörten und $\varepsilon = 1$ dem zu lösenden gestörten Problem (20·1), (20·2).

Die n-te Eigenfunktion y_n des neuen Problems (20·5), (20·2) wird in ihrer Abhängigkeit von ε betrachtet. Wir machen nun die im allgemeinen schwer beweisbare Voraussetzung, daß sich der n-te Eigenwert λ_n und die n-te Eigenfunktion y_n in Potenzreihen nach Potenzen von ε entwickeln lassen[1]) und daß diese Potenzreihen noch für $\varepsilon = 1$ konvergieren und daß $M[y_n]$ und $N[y_n]$ durch gliedweises Differenzieren gebildet werden können:

$$(20\cdot6)\qquad y_n = y_{n,0} + \varepsilon y_{n,1} + \varepsilon^2 y_{n,2} + \cdots; \quad \lambda_n = \lambda_{n,0} + \varepsilon\lambda_{n,1} + \varepsilon^2\lambda_{n,2} + \cdots.$$

Hierbei wird $\lambda_{n,0}$ als einfacher Eigenwert des ungestörten Problems vorausgesetzt, der Fall eines mehrfachen Eigenwertes wird in 20·2 besprochen.

Geht man mit dem Ansatz (20·6) in (20·5) hinein, so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu M^*[y_{n,\nu}] + \sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^\nu \bar{M}[y_{n,\nu-1}]$$
$$= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu\lambda_{n,\nu}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu N^*[y_{n,\nu}] + \sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^\nu \bar{N}[y_{n,\nu-1}]\right)$$

---

[1]) Für weitreichende Fälle hat F. RELLICH die Möglichkeit der Entwicklung von λ_n und y_n in Potenzreihen nach Potenzen von ε bewiesen, das Konvergenzgebiet und sogar den Fehler bei Abbrechen nach dem k-ten Gliede in (20·6) abgeschätzt, auch für den Fall mehrfacher Eigenwerte, Math. Ann. 113 (1937) 600; 116 (1939) 555; 117 (1940) 356. Als Beispiel für seine Abschätzungen sei angegeben (Math. Ann. 117 (1940) 361 und 378): Vorgelegt sei das Problem

$$-(f_1 y')' + (f_0 + \varepsilon s)y = \lambda y; \quad y(0) = y(l) = 0$$

mit f_1 stetig differenzierbar, f_0, s stetig, $f_1 > 0$, $s(x) \leq S$ in $0 \leq x \leq l$.

Für das ungestörte Problem (für $\varepsilon = 0$) sei d_n so gewählt, daß im Intervall $\lambda_{n,0} - d_n < \lambda < \lambda_{n,0} + d_n$ außer $\lambda_{n,0}$ kein weiterer Eigenwert enthalten ist. Dann konvergieren die Reihen (20·6) für $|\varepsilon| < \frac{d_n}{16S}$ und es gelten (bei geeigneter Normierung der Eigen- und Näherungsfunktionen) die Abschätzungen für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left|y_n - \sum_{\nu=0}^{k}\varepsilon^\nu y_{n,\nu}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{16\varepsilon S}{d_n}\right)^{k+1}, \quad \left|\lambda_n - \sum_{\nu=0}^{k}\varepsilon^\nu\lambda_{n,\nu}\right| \leq \frac{d_n}{4}\left(\frac{16\varepsilon S}{d_n}\right)^{k+1}$$

Hier werden also außer den Eigenwerten auch die Eigenfunktionen in Schranken eingeschlossen.

Bei formalem Ausmultiplizieren der Reihen und Ordnen nach Potenzen von ε erhält man durch Gleichsetzen der Koeffizienten

$$(20\cdot7)\quad \{\text{von } \varepsilon^0: \qquad M^*[y_{n,0}] = \lambda_{n,0} N^*[y_{n,0}]$$

$$(20\cdot8)\quad \{\text{von } \varepsilon: \quad M^*[y_{n,1}] + \bar{M}[y_{n,0}] = \lambda_{n,1} N^*[y_{n,0}] + \lambda_{n,0}(N^*[y_{n,1}] + \bar{N}[y_{n,0}])$$

$$(20\cdot9)\quad \begin{cases} \text{von } \varepsilon^\nu: & M^*[y_{n,\nu}] + \bar{M}[y_{n,\nu-1}] = \lambda_{n,\nu} N^*[y_{n,0}] \\ & \qquad + \sum_{\varrho=1}^{\nu} \lambda_{n,\nu-\varrho}(N^*[y_{n,\varrho}] + \bar{N}[y_{n,\varrho-1}]) \,. \end{cases}$$

Die erste Gleichung (20·7) stimmt mit (20·3) überein und ist von selbst erfüllt. Wegen der vorausgesetzten Selbstadjungiertheit des ungestörten Problems kann man die Unbekannten $\lambda_{n,1}$, $y_{n,1}$, $\lambda_{n,2}$, $y_{n,2}$, ... auf folgende Weise nacheinander bestimmen[1]). Multipliziert man (20·8) mit $y_{n,0}$ und integriert über das Grundgebiet, so ist nach (4·9) unter Benutzung von (20·7)

$$\int_a^b y_{n,0}(M^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0} N^*[y_{n,1}])\,dx = \int_a^b y_{n,1}(M^*[y_{n,0}] - \lambda_{n,0} N^*[y_{n,0}])\,dx = 0$$

und man erhält für $\lambda_{n,1}$ den Wert

$$(20.10)\qquad \lambda_{n,1} = \frac{\int_a^b y_{n,0}(\bar{M}[y_{n,0}] - \lambda_{n,0}\bar{N}[y_{n,0}])\,dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}]\,dx}\,.$$

Entsprechend berechnet man aus (20·9) für $\nu = 2$ durch Multiplikation mit $y_{n,0}$ und Integration über das Grundgebiet

$$(20\cdot11)\quad \lambda_{n,2} = \frac{\int_a y_{n,0}(\bar{M}[y_{n,1}] - \lambda_{n,1} N[y_{n,0}] - \lambda_{n,1} N^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0}\bar{N}[y_{n,1}])\,dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}]\,dx}\,.$$

Der Rechengang ist also folgender: $y_{n,0}$ und $\lambda_{n,0}$ sind bekannt. Dann rechnet man $\lambda_{n,1}$ nach (20·10) aus, wozu (außer Differentiationen und elementaren Operationen) nur Quadraturen nötig sind. Mit dem so berechneten $\lambda_{n,1}$ findet man $y_{n,1}$ durch Lösung eines Randwertproblems: $y_{n,1}$ soll der Differentialgleichung (20·8), d. h.:

$$(20\cdot12)\quad M^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0} N^*[y_{n,1}] = r(x) = -\bar{M}[y_{n,0}] + \lambda_{n,0}\bar{N}[y_{n,0}] + \lambda_{n,1} N^*[y_{n,0}]$$

und den Randbedingungen (20·2) genügen.

Dieses inhomogene Randwertproblem hat eine Lösung; denn das zugehörige homogene Problem ist das ungestörte Eigenwertproblem (20·3),

---

[1]) Vgl. R. COURANT-D. HILBERT, Methoden der math. Physik, Bd. I, 2. Aufl., Berlin (1931), S. 296—300.

(20·2), und das inhomogene Problem ist nach (5·36) lösbar, wenn die rechte Seite $r(x)$ orthogonal zur Eigenfunktion $y_{n,0}$ ist:

$$(20\cdot 13)\qquad \int_a^b r(x)\, y_{n,0}(x)\, dx = 0;$$

es ist aber $\lambda_{n,1}$ durch (20·10) gerade so ermittelt worden, daß diese Bedingung erfüllt ist. $y_{n,1}$ ist durch das Randwertproblem nicht eindeutig, sondern nur bis auf ein additiv hinzutretendes Vielfaches von $y_{n,0}$ bestimmt, wir können aber dieses Zusatzglied bei $y_{n,1}$ fortlassen und in der Entwicklung (20·6) zu dem Gliede mit $y_{n,0}$ hinzugeschlagen denken. Hat man $y_{n,1}$ ermittelt, so erfordert die Berechnung von $\lambda_{n,2}$ nach (20·11) wieder nur Quadraturen, dagegen muß man zur Bestimmung von $y_{n,2}$ abermals ein Randwertproblem lösen: $y_{n,2}$ muß der Differentialgleichung (20·9) für $\nu = 2$ und den Randbedingungen (20·2) genügen; auch dieses Randwertproblem ist lösbar, da die (20·13) entsprechende Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist. Entsprechend geht es mit den weiteren $\lambda_{n,i}$, $y_{n,i}$; man kann leicht noch die Formeln für $\lambda_{n,3}, \ldots$ anschreiben[1]), oft wird man sich jedoch mit $\lambda_{n,1}$ nach (20·10) begnügen, weil man dazu noch ohne Lösung von Randwertproblemen auskommt. Man verwendet dann als verbesserten Näherungswert für das Eigenwertproblem (20·1), (20·2) (d. h. also für $\varepsilon = 1$)

$$\lambda_n \approx \lambda_{n,0} + \lambda_{n,1}\,.$$

20·2. Mehrfache Eigenwerte. Es sei jetzt $\lambda_{n,0}$ ein mehrfacher, etwa α-facher Eigenwert des ungestörten Problems (20·3), (20·2); es gibt zu ihm α Lösungen $y_{n,0}, y_{n+1,0}, \ldots, y_{n+\alpha-1,0}$, die wir als zueinander im verallgemeinerten Sinne orthogonal annehmen können (vgl. 5·9). Durch diese Forderung ist das System $y_{n,0}, \ldots, y_{n+\alpha-1,0}$ noch keineswegs, auch nicht bis auf konstante Faktoren, festgelegt, und es wird sich zeigen, daß noch weitere Bedingungen hinzukommen.

Die auffälligste Erscheinung bei der Störung mehrfacher Eigenwerte ist die „Aufspaltung", d. h. die Tatsache, daß bei Anbringen einer kleinen Störung das gestörte Problem im allgemeinen nicht mehr einen mehrfachen, sondern mehrere dicht beieinander liegende einfache Eigenwerte hat. Bei dem bereits in 5·9 betrachteten Beispiel (5·29)

$$y^{\mathrm{IV}} + 4y = -\lambda y'',$$
$$y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0$$

ist der kleinste Eigenwert $\lambda_1 = 5$ ein doppelter mit den Eigenfunktionen $\sin x$ und $\sin 2x$. Bei dem gestörten Problem

$$y^{\mathrm{IV}} + (4+\varepsilon)\, y = -\lambda y''$$

[1]) W. MEYER ZUR CAPELLEN, Ann. Physik (5) 8 (1931) 301.

mit denselben Randbedingungen gehört $\sin x$ zum Eigenwert $5 + \varepsilon$ und $\sin 2x$ zum Eigenwert $5 + \frac{\varepsilon}{4}$, der zweifache Eigenwert $\lambda_1 = 5$ ist in zwei einfache Eigenwerte „aufgespalten".

Der in 20·1 eingeschlagene Weg läßt sich hier genau so durchführen, nur muß jetzt bei der Bestimmung von $y_{n,1}$ aus dem Randwertproblem (20·12), (20·2) gefordert werden, daß die rechte Seite $r(x)$ zu allen Eigenfunktionen $y_{n,0}, \ldots, y_{n+\alpha-1,0}$ orthogonal ist; dann ist nach 5·9 das Randwertproblem lösbar. Es muß also gelten

$$\int_a^b r(x)\, y_{n+i,0}(x)\,dx = 0 \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots, \alpha - 1 \tag{20·14}$$

oder, wenn man

$$\bar{M}[y] - \lambda_{n,0} N[y] = S[y] \text{ setzt,}$$

$$\int_a^b S[y_{n,0}]\, y_{n+i,0}\,dx = \lambda_{n,1} \int_a^b N^*[y_{n,0}]\, y_{n+i,0}\,dx\,. \tag{20·15}$$

Das rechtsstehende Integral ist für $i = 0$ von Null verschieden und für $i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ verschwindet es wegen (5·33). Folglich müssen die $y_{n+i,0}$ die Bedingung erfüllen:

$$\int_a^b S[y_{n,0}]\, y_{n+i,0}(x)\,dx = 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1\,.$$

Genau so ergibt sich, wenn man y_{n+1} als Funktion von ε betrachtet und man dieselbe Überlegung mit y_{n+1} an Stelle von y_n durchführt, als Bedingung zur Lösbarkeit des Randwertproblems für $y_{n+i,1}$:

$$\int_a^b S[y_{n+1,0}]\, y_{n+i,0}(x)\,dx = 0 \qquad \text{für } i = 0, 2, 3, \ldots, \alpha - 1. \tag{20·16}$$

Allgemein hat man

$$\int_a^b S[y_{n+k,0}]\, y_{n+i,0}\,dx = 0 \qquad \text{für } i \neq k;\ i, k = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1\,. \tag{20·17}$$

Hat man die $y_{n+i,0}$ so bestimmt, daß sie außer den Orthogonalitätsbedingungen (5·33) noch die Forderungen (20·17) erfüllen, so läßt sich der in (20·1) beschriebene Weg ohne weitere Schwierigkeiten beschreiten, insbesondere erhält man z. B.

$$\lambda_1 = \frac{\int_a^b S[y_{n+i,0}]\, y_{n+i,0}\,dx}{\int_a^b N^*[y_{n+i,0}]\, y_{n+i,0}\,dx} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1)\,. \tag{20·18}$$

Daß es stets ein System von Eigenfunktionen $y_{n+i,0}$ gibt, welches die Forderungen (5·33) und (20·17) erfüllt, wird durch einen Satz aus der

Algebra sichergetellt. Sind nämlich $u_1, u_2, \ldots, u_\alpha$ beliebige, voneinander linear unabhängige Eigenfunktionen von (20·3), (20·2), so setzen wir an:

(20·19) $$y_{n+i-1,0} = \sum_{r=1}^{\alpha} C_{ir} u_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Dann wird, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$N_{rs} = \int_a^b N^*[u_r] u_s dx, \qquad S_{rs} = \int_a^b S[u_r] u_s dx,$$

$$n_{i,k} = \int_a^b N^*[y_{n+i-1,0}] y_{n+k-1,0} dx, \qquad s_{i,k} = \int_a^b S[y_{n+i-1,0}] y_{n+k-1,0} dx,$$

bei der Transformation (20·19)

(20·20) $$\begin{cases} n_{ik} = \sum_{r,s=1}^{\alpha} C_{ir} C_{ks} N_{rs} \\ s_{ik} = \sum_{r,s=1}^{\alpha} C_{ir} C_{ks} S_{rs}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind nun zugleich die Transformationsformeln, wenn man zwei quadratische Formen

$$Q_1 = \sum_{r,s=1}^{\alpha} N_{r,s} Z_r Z_s \qquad \text{und} \qquad Q_2 = \sum_{r,s=1}^{\alpha} S_{rs} Z_r Z_s$$

durch die Transformation

(20·21) $$Z_r = \sum_{i=1}^{\alpha} C_{ir} x_i$$

in die neuen Formen

$$Q_1' = \sum_{i,k=1}^{\alpha} n_{ik} x_i x_k \qquad \text{und} \qquad Q_2' = \sum_{i,k=1}^{\alpha} s_{ik} x_i x_k$$

überführt. Die Algebra[1]) lehrt dann, daß es eine reelle Transformation (20·21) mit nichtverschwindender Determinante gibt, bei der Q_1' und Q_2' nur die rein quadratischen Glieder enthalten, bei der also $n_{ik} = s_{ik} = 0$ ist für $i \neq k$, sofern nur mindestens eine der beiden quadratischen Formen, etwa Q_1, definit ist. Diese Voraussetzung ist bei uns erfüllt, denn es ist $u = \sum_{k=1}^{\alpha} Z_k u_k$ eine Eigenfunktion des ungestörten Problems und daher

$$Q_1 = \sum_{r,s=1}^{\alpha} N_{rs} Z_r Z_s = \int_a^b N^* \left[\sum_{r=1}^{\alpha} Z_r u_r\right] \left(\sum_{s=1}^{\alpha} Z_s u_s\right) dx \geq 0$$

und $Q_1 = 0$ nur für $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_\alpha = 0$, d. h. Q_1 ist positiv definit.

---

[1]) M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, S. 187, Leipzig und Berlin 1910.

Nach dem Satz aus der Algebra gibt es also Zahlen C_{ik}, mit denen Q_1 und Q_2 in Formen Q_1', Q_2' mit $n_{ik} = s_{ik} = 0$ für $i \neq k$ übergeführt werden, und mit diesen Zahlen C_{ik} kann man aus den beliebig gewählten Eigenfunktionen u_k nach (20·19) zu dem System $y_{n,0}, \ldots, y_{n+\alpha-1,0}$ übergehen, das in verallgemeinertem Sinne orthogonal ist, (20·17) erfüllt und für das die Störungsrechnung nach 20·1 durchführbar ist.

20·3. Zusammenhang mit dem Rayleighschen Prinzip. In 20·1 hatte sich gezeigt, daß man bei Durchführung der Störungsrechnung den ersten Schritt, nämlich die Berechnung von $\lambda_{n,1}$, leicht, nämlich nach (20·10) durch Ausführung zweier Quadraturen, aber jeden weiteren Schritt nur schwer, nämlich jedesmal durch Lösung eines Randwertproblems, ausführen kann. Es ist nun bemerkenswert, daß die bei Abbrechen mit dem linearen Gliede erhaltene Näherung der Störungsrechnung

$$\lambda_n \approx \lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} \tag{20·21}$$

in vielen Fällen mit dem RAYLEIGHschen Quotienten (4·25)

$$R = R[y_{n,0}] = \frac{\int_a^b y_{n,0}\, M[y_{n,0}]\, dx}{\int_a^b y_{n,0}\, N[y_{n,0}]\, dx} \tag{20·22}$$

übereinstimmt oder in engem Zusammenhang mit ihm steht. Nach (20·7) ist nämlich

$$\lambda_{n,0} = \frac{\int_a^b y_{n,0}\, M^*[y_{n,0}]\, dx}{\int_a^b y_{n,0}\, N^*[y_{n,0}]\, dx},$$

also mit Benutzung von (20·10)

$$\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} = \frac{\int_a^b y_{n,0}\{M[y_{n,0}] - \lambda_{n,0}\bar{N}[y_{n,0}]\}\, dx}{\int_a^b y_{n,0}\, N^*[y_{n,0}]\, dx}. \tag{20·23}$$

Durch Vergleich mit dem Ausdruck $R[y_{n,0}]$ nach (20·22) erhält man, wenn man die Brüche auf gemeinsamen Hauptnenner bringt und (20·4) benutzt:

$$\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} = \tag{20·24}$$
$$R[y_{n,0}] + \frac{\int_a^b y_{n,0}\bar{N}[y_{n,0}]\, dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}]\, dx} \cdot \frac{\int_a^b y_{n,0}\{M[y_{n,0}] - \lambda_{n,0} N[y_{n,0}]\}\, dx}{\int_a^b y_{n,0} N[y_{n,0}]\, dx}$$

Spezialfälle. Oft wird man die Störungsrechnung in der Weise anwenden, daß man das vorgelegte Problem (20·1), (20·2) mit einem anderen

vergleicht, bei dem nicht zugleich beide Ausdrücke M und N abgeändert sind. Hat man in (20·1) das mit λ multiplizierte Glied der Differentialgleichung $N = N^*$ belassen und unterscheiden sich nur M und M^*, so ist $\bar{N} \equiv 0$, und die Formel (20·24) besagt:

$$\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} = R[y_{n,0}]\,. \tag{20·25}$$

Ist $y_{n,0}$ zugleich Eigenfunktion des gestörten Problems, wie die Funktion $\sin x$ bei dem Beispiel am Anfang von 20·2, so ist (20·25) ebenfalls erfüllt, und zugleich stimmt $\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1}$ dann mit dem exakten Eigenwert λ_n des gestörten Problems überein.

Hat man dagegen das Glied $M = M^*$ beibehalten und nur N abgeändert, so folgt aus (20·10)

$$\lambda_{n,1} = \lambda_{n,0} - \lambda_{n,0}\frac{\int\limits_a^b y_{n,0}\bar{N}[y_{n,0}]\,dx}{\int\limits_a^b y_{n,0}N^*[y_{n,0}]\,dx} = \lambda_{n,0}\left(1 - \frac{\lambda_{n,0}}{R[y_{n,0}]}\right)$$

und damit

$$\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} = R - \frac{(R-\lambda_{n,0})^2}{R} \tag{20·26}$$

Ist R positiv, so fällt der verbesserte Wert $\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1}$ kleiner als der RAYLEIGHsche Quotient R aus und ist nur dann gleich R, wenn $\lambda_{n,0} = R$ ist. In diesem Falle $\lambda_{n,0} = R$ ist also die Verbesserung $\lambda_{n,1} = 0$. Man erkennt die bevorzugte Rolle, die der Wert R hier spielt.

20·4. Beispiel zur Störungsrechnung. Knicken schwerer Gestänge. Die Bestimmung der Knicklast P für einen beiderseits gelenkig gelagerten, lotrecht stehenden Stab der Länge l von konstantem Querschnitt bei Berücksichtigung des Eigengewichtes führt[1]) auf das Eigenwertproblem

$$y^{IV} - \varepsilon(x\,y')' = -\lambda y'', \tag{20·27}$$
$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0\,.$$

Ist α die Biegesteifigkeit des Stabes, so liefert der kleinste Eigenwert λ_1 die gesuchte Knicklast $P = \lambda_1\alpha$. Der Einfachheit halber denken wir uns dimensionslose Größen eingeführt und $l = 1$ gesetzt. Die der Dichte des Stabes proportionale Größe ε erscheint hier als Störungsparameter. Für $\varepsilon = 0$ hat das „ungestörte" Problem

$$M^*[y] = \lambda^* N^*[y], \text{ d. h. hier } y^{IV} = -\lambda^* y''$$

bei denselben Randbedingungen die Eigenfunktionen

$$y_{n,0} = \sin n\pi x$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda^* = \lambda_{n,0} = n^2\pi^2\,.$$

---

[1]) FR. A. WILLERS, Das Knicken schwerer Gestänge, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) 43.

Die Störung besteht in dem Gliede

$$\bar{M}[y] = -(x y')',$$

während in (20·4)

$$N = 0 \text{ ist}.$$

Die Verbesserung $\lambda_{n,1}$ findet man unmittelbar nach (20·10) zu

$$\lambda_{n,1} = \frac{\int\limits_0^1 \sin n\pi x[-x(\sin n\pi x)']' dx}{\int\limits_0^1 \sin n\pi x(-n^2\pi^2 \sin n\pi x) dx} = \frac{\int\limits_0^1 x \sin^2 n\pi x dx}{\int\limits_0^1 \sin^2 n\pi x dx} = \frac{1}{2}.$$

Als verbesserte Eigenwerte von (20·27) hat man somit

$$\lambda_n \approx n^2\pi^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Will man noch die in ε quadratischen Glieder berücksichtigen, so muß man $y_{n,1}$ nach (20·12) als Lösung des folgenden Randwertproblems bestimmen:

$$y_{n,1}^{IV} + n^2\pi^2 y_{n,1}'' = (x y_{n,0}')' - \frac{1}{2} y_{n,0}''$$

$$= n\pi \cos n\pi x + n^2\pi^2 \left(\frac{1}{2} - x\right) \sin n\pi x$$

$$y_{n,1}(0) = y_{n,1}''(0) = y_{n,1}(1) = y_{n,1}''(1) = 0.$$

Die Lösung lautet, wenn man die additiv hinzutretende, auf $\lambda_{n,2}$ ohne Einfluß bleibende Funktion const · $\sin n\pi x$ fortläßt:

$$y_{n,1} = \frac{x - x^2}{4n\pi} \cos n\pi x + \frac{3x}{4n^2\pi^2} \sin n\pi x + \frac{1}{n^3\pi^3}[(\cos n\pi x - 1) + x(1 + (-1)^{n+1})].$$

Nunmehr folgt $\lambda_{n,2}$ nach (20·11) durch Quadraturen:

$$\lambda_{n,2} = \frac{\int\limits_0^1 y_{n,0} \left[(x y_{n,1}')' - \frac{1}{2} y_{n,1}''\right] dx}{\int\limits_0^1 y_{n,0} y_{n,0}'' dx}$$

oder nach Einsetzen von $y_{n,0}$ und $y_{n,1}$:

$$\lambda_{n,2} = \frac{1}{48 n^2\pi^2} + \frac{7}{16 n^4\pi^4} + \begin{cases} + \dfrac{8}{n^6\pi^6} & \text{für ungerades } n \\ 0 & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Die verbesserten Eigenwerte von (20·27) kann man nunmehr mit

$$\lambda_n \approx n^2\pi^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon^2 \lambda_{n,2}$$

angeben. Für $\varepsilon = 1$ und $n = 1$ erhält man somit $\lambda_1 \approx 10{,}371$ an Stelle des entsprechenden Wertes $\lambda_{1,0} = \pi^2 \approx 9{,}87$ des ungestörten Problems.

§ 21. Weitere Methoden.

21·1. Formel von Dunkerley für zusammengesetzte Systeme. Bei dem Eigenwertproblem

$$M[y] = \lambda N[y], \quad U_\mu[y] = 0 \tag{21·1}$$

möge sich der Ausdruck $N[y]$ als Summe mehrerer Ausdrücke $N_\varrho[y]$ darstellen lassen:

$$N[y] = \sum_{\varrho=1}^{r} N_\varrho[y], \tag{21·2}$$

wobei man für alle r Teilprobleme

$$M[y] = \lambda^{(\varrho)} N_\varrho[y], \quad U_\mu[y] = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{21·3}$$

den kleinsten Eigenwert $\lambda_1^{(\varrho)}$ kennt. Ferner sollen alle r Teilprobleme (21·3) die für die Gültigkeit der Minimaleigenschaft von $\lambda_1^{(\varrho)}$ in 8·1 geforderten Voraussetzungen der Selbstadjungiertheit und Volldefinitheit erfüllen. Es gilt also

$$\lambda_1^{(\varrho)} \leq \frac{\int_a^b u M[u]\,dx}{\int_a^b u N_\varrho[u]\,dx}, \tag{21·4}$$

wenn u irgendeine Vergleichsfunktion ist. Dann läßt sich für den ersten Eigenwert λ_1 des „zusammengesetzten" Problems (21·1) die untere Schranke aufstellen (Formel von J. DUNKERLEY):

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\sum_{\varrho=1}^{r} \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho)}}}. \tag{21·5}$$

Setzt man nämlich die erste Eigenfunktion y_1 des Problems (21·1) als Vergleichsfunktion u in (21·4) ein, so erhält man

$$\lambda_1^{(\varrho)} \leq \frac{\int_a^b y_1 M[y_1]\,dx}{\int_a^b y_1 N_\varrho[y_1]\,dx} = \lambda_1 \frac{\int_a^b y_1 N[y_1]\,dx}{\int_a^b y_1 N_\varrho[y_1]\,dx}$$

oder

$$\frac{1}{\lambda_1} \int_a^b y_1 N_\varrho[y_1]\,dx \leq \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho)}} \int_a^b y_1 N[y_1]\,dx .$$

Schreibt man diese Gleichung für alle ϱ an und summiert über ϱ von 1 bis r, so ergibt sich wegen (21·2) die Behauptung

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho)}}.$$

Ein Beispiel wird in Aufgabe 6 von 21·6 gegeben.

21·2. Formel von Southwell[1]**).** Diese Formel stellt in gewissem Sinne das Gegenstück zur DUNKERLEYschen Formel dar; sie liefert eine untere Schranke für den ersten Eigenwert λ_1 des Problems (21·1), wenn sich $M[y]$ als Summe

$$M[y] = \sum_{\varrho=1}^{r} M_\varrho[y]$$

darstellen läßt und die r Teilprobleme

(21·6) $$M_\varrho[y] = \lambda^{(\varrho)} N[y], \qquad U_\mu[y] = 0$$

selbstadjungiert und volldefinit sind. Die Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes $\lambda_1^{(\varrho)}$ von (21·6) liefert dann, wenn man als Vergleichsfunktion die erste Eigenfunktion y_1 von (21·1) einsetzt, die Aussage

$$\lambda_1^{(\varrho)} \leq \frac{\int_a^b y_1 M_\varrho[y_1]\,dx}{\int_a^b y_1 N[y_1]\,dx}.$$

Summation über ϱ von 1 bis r liefert

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_1^{(\varrho)} \leq \frac{\int_a^b y_1 M[y_1]\,dx}{\int_a^b y_1 N[y_1]\,dx},$$

der rechtsstehende Quotient ist gleich λ_1, man erhält somit die SOUTHWELLsche Ungleichung

(21·7) $$\lambda_1 \geq \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_1^{(\varrho)}.$$

21·3. Minimum des mittleren Fehlerquadrates[2]**).** Die Methode wird für den Fall von nur einer unabhängigen Veränderlichen x beschrieben, gilt aber genau so für mehrere unabhängige Veränderliche. Für eine Eigenfunktion y des Problems

$$M[y] = \lambda N[y], \quad U_\mu[y] = 0$$

wird ein Näherungsansatz

(21·8) $$y \approx w(x, c_1, c_2, \ldots, c_k)$$

gemacht, wobei w nach Möglichkeit die Randbedingungen erfüllt. Wenn

[1]) G. TEMPLE, Proc. Lond. math. Soc. (2) 29 (1929) 271.

[2]) M. NASTA, Atti d. R. Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. (6) 12 (1930) 212. W. GRÖBNER, Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. 48 (1938) 22.

man sich auf normierte Funktionen w beschränkte, so würde die Forderung nach dem kleinsten mittleren Fehlerquadrat lauten:

$$\int_a^b (M[w] - \Lambda N[w])^2 dx = \text{Min.}$$

Um aber keine Normierungsbedingungen einführen zu müssen, bestimmt man die Konstanten c_i und einen Näherungswert Λ für λ aus der Forderung

$$F[w] = \frac{\int_a^b (M[w] - \Lambda N[w])^2 dx}{\int_a^b w^2 dx} = \text{Min.} \tag{21·9}$$

Für die c_i und Λ hat man dann die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{21·10}$$

Setzt man als einfachsten Fall w gleich einer geschätzten Funktion, die nicht mehr von Parametern $c_1, c_2, \ldots$ abhängt, so liefert $\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = 0$ den Näherungswert

$$\Lambda = \frac{\int_a^b M[w] N[w] dx}{\int_a^b (N[w])^2 dx}. \tag{21·11}$$

Dieser Wert stimmt für $N[y] = \text{const} \cdot y$ mit dem RAYLEIGHschen Quotienten (8·1) überein, im Fall $N[y] \neq \text{const} \cdot y$ im allgemeinen jedoch nicht.

21·4. Kettenbruchentwicklung, Mathieusche Differentialgleichung. Verschiedene Anwendungen, z. B. Probleme der Potentialtheorie, führen auf die MATHIEUsche Differentialgleichung

$$-y'' = (\lambda - 2h^2 \cos 2x) y \tag{21·12}$$

mit den Parametern λ und h^2. In einer λ-h^2-Ebene kann man „labile" und „stabile" Gebiete aufsuchen, und zwar sagt man, ein Punkt λ, h^2 gehört zum stabilen Gebiet, wenn die zugehörige Differentialgleichung (21·12) für dieses Parameterpaar nur Lösungen besitzt, die bei unbegrenzt wachsendem x beschränkt bleiben, andernfalls gehört er zum labilen Gebiet[1]). Die Grenzkurven zwischen labilen und stabilen Gebieten werden von denjenigen Punkten λ, h^2 gebildet, für die (21·12) eine periodische Lösung von

[1]) Diese Gebiete sind dargestellt bei M. J. O. STRUTT, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. I, S. 230, Berlin 1932. Dort findet man auch eine ausführliche Theorie der MATHIEUschen Differentialgleichung.

der Periode 2π besitzt. Diese periodischen Lösungen von (21·12) heißen MATHIEUsche Funktionen erster Art. Bei gegebenem h sind sie die Eigenfunktionen des durch (21·12) und

$$y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi) \tag{21·13}$$

festgelegten Eigenwertproblems. Sie lassen sich in FOURIERsche Reihen entwickeln, und zwar unterscheidet man vier Typen:

$$\left\{\begin{aligned} C_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,2m+1} \cos(2m+1)x && n = 1, 3, 5, \ldots \\ C_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,2m} \cos 2mx && n = 0, 2, 4, \ldots \\ S_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{n,2m+1} \sin(2m+1)x && n = 1, 3, 5, \ldots \\ S_n(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,2m} \sin 2mx && n = 0, 2, 4, \ldots \end{aligned}\right. \tag{21·14}$$

Die Eigenfunktionen und die Grenzkurven lassen sich für alle vier Typen gut nach einer Kettenbruchmethode berechnen; zur Erläuterung greifen wir etwa die S_n mit ungeradem n heraus. Wir gehen mit dem in (21·14) für S_n angegebenen Reihenansatz in die Differentialgleichung (21·12) ein, berücksichtigen

$$\cos 2x \sin kx = \frac{1}{2}\,[\sin(k+2)x + \sin(k-2)x]$$

und erhalten, indem wir die Koeffizienten von $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x, \ldots$ vergleichen:

$$\begin{aligned} &\text{Faktor von } \sin x\ : -\ \ B_{n,1} + \lambda B_{n,1} + h^2 B_{n,1} - h^2 B_{n,3} = 0 \\ &\text{Faktor von } \sin 3x: -\ 9B_{n,3} + \lambda B_{n,3} - h^2 B_{n,1} - h^2 B_{n,5} = 0 \\ &\text{Faktor von } \sin 5x: - 25B_{n,5} + \lambda B_{n,5} - h^2 B_{n,3} - h^2 B_{n,7} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Das sind unendlich viele lineare Gleichungen für die $B_{n,1}, B_{n,3}, B_{n,5}, \ldots$ Ihre Determinante[1])

---

[1]) Die Determinante ist hierbei rein formal aufgestellt. Nimmt man als Näherung eine Abschnittsdeterminante, z. B. eine dreireihige, so bedeutet dies, daß man von dem unendlichen Gleichungssystem nur die drei ersten (hier angeschriebenen) Gleichungen benutzt und in ihnen nur die Größen $B_{n,1}, B_{n,3}, B_{n,5}$ stehen läßt, also das Glied $B_{n,7}$ streicht. Man fragt also hierbei nach Lösungen $B_{n,\nu}$ des Gleichungssystems, bei denen die höheren $B_{n,\nu}$ vernachlässigbar klein sind. Ohne diese Zusatzforderung hat das unendliche Gleichungssystem für beliebige Werte von λ und $h^2 \neq 0$ Lösungen; man braucht nur $B_{n,1} = 1$ zu setzen und die $B_{n,3}, B_{n,5}, B_{n,7}, \ldots$ rekursiv zu berechnen. Dabei werden im allgemeinen die Beträge der $B_{n,\nu}$ für $\nu \to \infty$ nicht gegen Null gehen.

$$(21\cdot15)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + h^2 & -h^2 & 0 & 0 & \dots \\ -h^2 & \lambda - 9 & -h^2 & 0 & \dots \\ 0 & -h^2 & \lambda - 25 & -h^2 & \dots \\ 0 & 0 & -h^2 & \lambda - 49 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ist von der Bauart, daß λ nur in der Diagonale, und zwar linear, auftritt und daß nur noch die beiden der Diagonale benachbarten Reihen mit nichtverschwindenden Elementen besetzt sind. Durch Nullsetzen derartiger Determinanten erhaltene Gleichungen lassen sich in Kettenbruchgleichungen verwandeln: wir schreiben die Determinante, da ähnliche Determinanten gelegentlich auftreten, allgemein an:

$$(21\cdot16)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} & 0 & \dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} & a_{34} & \dots \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} - \lambda b_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 .$$

Die durch Fortlassen der n ersten Spalten und n ersten Zeilen entstehende Determinante sei mit Δ_n bezeichnet, dann folgt durch Entwicklung nach den Elementen der ersten Spalte

$$\Delta = (a_{11} - \lambda b_{11})\Delta_1 - a_{12}a_{21}\Delta_2 = 0 ,$$

ebenso

$$\Delta_1 = (a_{22} - \lambda b_{22})\Delta_2 - a_{23}a_{32}\Delta_3 ,$$
$$\Delta_2 = (a_{33} - \lambda b_{33})\Delta_3 - a_{34}a_{43}\Delta_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Umformung dieser Gleichungen ergibt

$$\lambda b_{11} = a_{11} - a_{12}\,a_{21}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = a_{22} - \lambda b_{22} - a_{23}\,a_{32}\frac{\Delta_3}{\Delta_2} ,$$

also

$$\lambda b_{11} = a_{11} - \cfrac{a_{12}a_{21}}{a_{22} - \lambda b_{22} - a_{23}a_{32}\cfrac{\Delta_3}{\Delta_2}}$$

oder bei Fortführung des Verfahrens den unendlichen Kettenbruch

$$(21\cdot17)\qquad \lambda b_{11} = a_{11} - \cfrac{a_{12}\,a_{21}}{a_{22} - \lambda b_{22} - \cfrac{a_{23}\,a_{32}}{a_{33} - \lambda b_{33} - \cfrac{a_{34}\,a_{43}}{a_{44} - \lambda b_{44} - \dots}}}$$

Auf die Frage nach der Konvergenz des Kettenbruches soll hier nicht eingegangen werden.

Die Anwendung auf die Determinante (21·15) liefert

$$(21 \cdot 18) \qquad \lambda = 1 - h^2 + \cfrac{h^4}{\lambda - 9 - \cfrac{h^4}{\lambda - 25 - \cfrac{h^4}{\lambda - 49 - \cdots}}}$$

Die numerische Rechnung löst diese Kettenbruchgleichung iterativ; die rechte Seite wird als $K(\lambda)$ bezeichnet, dann lautet (21·18) $\lambda = K(\lambda)$; setzt man rechts eine Näherung $\lambda^{(\nu)}$ ein, so erhält man als neuen Wert $\lambda^{(\nu+1)}$

$$\lambda^{(\nu+1)} = K(\lambda^{(\nu)}) .$$

In Abb. 21·1 ist $\lambda^{(\nu+1)}$ als Funktion von $\lambda^{(\nu)}$ aufgetragen, wobei die Berechnung von $\lambda^{(\nu+1)}$ sehr rasch geht, da der Kettenbruch wegen seiner guten Konvergenz schon nach wenigen Gliedern abgebrochen werden kann. Man sieht aus der Abbildung, daß die kleinste Wurzel von (21·18) wegen des flachen Verlaufes der $K(\lambda)$-Kurve iterativ sehr gut berechnet werden kann; man hat z. B. für $h = 1$ ausgehend von $\lambda^{(0)} = 0$

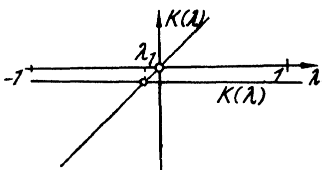


Abb. 21·1. Bestimmung von Eigenwerten bei der MATHIEUschen Differentialgleichung.

$$\lambda^{(0)} = 0; \quad \lambda^{(1)} = -0{,}1116; \quad \lambda^{(2)} = -0{,}11023; \quad \lambda^{(3)} = -0{,}110249 .$$

Die weiteren Nullstellen werden nicht mehr iterativ, sondern durch Berechnen von Punkten der Kurve in Abb. 21·1 und Interpolation gefunden, was wieder wegen der guten Konvergenz des Kettenbruches keine große Mühe verursacht. (V l. auch Aufg. 1 in 21·6.)

21·5. Reihenansätze. Eine häufig angewandte Methode zur angenäherten Berechnung von Eigenwerten besteht darin, die Eigenfunktionen $y(x)$ in Reihen (Potenzreihen, trigonometrische Reihen wie in 21·4 usw.) zu entwickeln (die Möglichkeit einer derartigen Entwicklung vorausgesetzt):

$$(21 \cdot 19) \qquad y(x) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} a_\varrho \, \psi_\varrho(x) .$$

Über die Güte und Brauchbarkeit von derartigen Reihenansätzen läßt sich in der Allgemeinheit, in der hier die Probleme und Methoden dargestellt sind, nichts aussagen. Es sind sowohl Beispiele bekannt, bei denen die Reihenansätze mit geringer Rechenarbeit vorzügliche Ergebnisse liefern, als auch Beispiele, bei denen die Konvergenz so langsam stattfindet, daß die Methode für numerische Zwecke unbrauchbar wird oder bei denen keine Konvergenz besteht.

Es soll daher hier nur kurz angedeutet werden, wie ein solcher Reihenansatz oft durchgeführt wird: die Brauchbarkeit des Reihenansatzes wird jedoch wesentlich von der günstigen Wahl der Ausgangsfunktionen $\psi_\varrho(x)$ und der geschickten Art der Durchführung des Ansatzes abhängen.

Die $\psi_\varrho(x)$ werden nach Möglichkeit bereits so gewählt, daß sie die Randbedingungen erfüllen.

Geht man mit dem Ansatz (21·19) in die vorgelegte Differentialgleichung (21·1) ein, so werden die dabei auftretenden Funktionen $M[\psi_\varrho]$ und $N[\psi_\varrho]$ wieder nach den ψ_ϱ (oder gegebenenfalls nach einem anderen vollständigen Funktionensystem) entwickelt:

$$(21{\cdot}20)\qquad M[\psi_\varrho] = \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_{\varrho.\sigma}\,\psi_\sigma; \qquad N[\psi_\varrho] = \sum_{\sigma=1}^{\infty} d_{\varrho.\sigma}\,\psi_\sigma .$$

Die Differentialgleichung lautet dann:

$$(21{\cdot}21)\qquad \sum_{\sigma=1}^{\infty}\psi_\sigma\left\{\sum_{\varrho=1}^{\infty} a_\varrho(c_{\varrho.\sigma} - \lambda d_{\varrho.\sigma})\right\} = 0 .$$

Die gleich Null gesetzten geschweiften Klammern stellen ein (unendliches) lineares homogenes Gleichungssystem für die a_ϱ dar. Dieses wird gewöhnlich näherungsweise behandelt, indem man die Nullstellen der Abschnittsdeterminante

$$(21{\cdot}22)\qquad \Delta_k(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda d_{11} & c_{12} - \lambda d_{12} \;\ldots & c_{1k} - \lambda d_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k1} - \lambda d_{k1} & c_{k2} - \lambda d_{k2} \;\ldots & c_{kk} - \lambda d_{kk} \end{vmatrix} = 0 ,$$

die ein Polynom k-ten Grades in λ ist, als Näherungswerte für die k ersten Eigenwerte ansieht.

21·6. Vermischte Übungsaufgaben. 1. Kettenbruchmethode: Man berechne die Knicklast für den bereits in Aufgabe 4 von 14·6 behandelten Knickstab, also den kleinsten Eigenwert λ_1 von

$$-y'' = \lambda\,(2 + \cos x)\,y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

nach der in 21·4 beschriebenen Kettenbruchmethode.

Ergebnis: Beim Ansatz $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ erhält man wegen

$$2\cos x \sin nx = \sin(n+1)x + \sin(n-1)x$$

für die a_n ein unendliches lineares Gleichungssystem, dessen gleich Null gesetzte Determinante mit $\lambda = \frac{1}{\mu}$ lautet

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-\mu & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 2-4\mu & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 2-9\mu & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2-16\mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 .$$

Nach (21·16) und (21·17) lautet die zugehörige Kettenbruchgleichung

$$(21\cdot 23) \qquad \lambda = f(\lambda) \quad \text{mit} \quad f(\lambda) = \cfrac{1}{2 - \cfrac{0{,}25}{2 - \cfrac{4}{\lambda} - \cfrac{0{,}25}{2 - \cfrac{9}{\lambda} - \cfrac{0{,}25}{2 - \cfrac{16}{\lambda} - \dots}}}}$$

Abb. 21·2 zeigt die graphische Darstellung von $f(\lambda)$, die Kurve läuft für den ersten Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden sehr flach, so daß das Iterations-

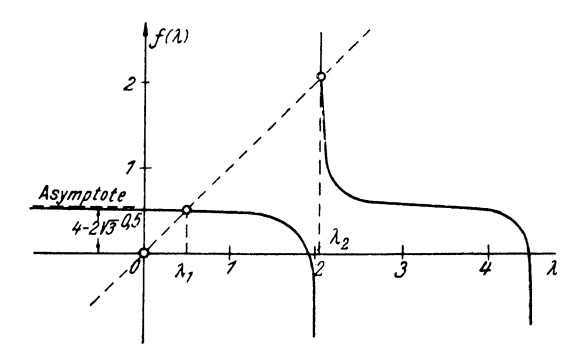


Abb. 21·2. Zur Kettenbruchmethode beim Knickstab in 21·6.

verfahren $\lambda_1^{(\nu+1)} = f(\lambda_1^{(\nu)})$ gut konvergiert. Ausgehend von $\lambda_1^{(0)} = 0$ erhält man

$$\lambda_1^{(1)} = 0{,}5\,; \quad \lambda^{(2)} = 0{,}490\,; \quad \lambda_1^{(3)} = 0{,}490036\,.$$

Die Rechnung zeigt ferner, daß bei Berechnung weiterer $\lambda_1^{(\nu)}$ sich die sechs angegebenen Dezimalen von $\lambda_1^{(3)}$ nicht mehr ändern.

Den zweiten und höheren Eigenwert kann man nach derselben Methode behandeln, wobei jedoch die entsprechenden Äste der $f(\lambda)$-Kurve sehr steil ausfallen. Man erhält günstigere Schnittpunkte z. B. für den zweiten Eigenwert λ_2, indem man

den Kettenbruch bis zu der Stelle $2-\frac{4}{\lambda}$, die diese Empfindlichkeit hervorruft, zurückrechnet und (21·23) auf die Form bringt $g(\lambda)=h(\lambda)$ mit

$$g(\lambda)=\cfrac{1}{2-\cfrac{9}{\lambda}-\cfrac{0{,}25}{2-\cfrac{16}{\lambda}-\cfrac{0{,}25}{2-\cfrac{25}{\lambda}-\cdots}}} \quad \text{und} \quad h(\lambda)=8\,\frac{\lambda-2}{\lambda}+\frac{\lambda}{1-2\lambda}.$$

Die Kurven für $g(\lambda)$ und $h(\lambda)$ sind in Abb. 21·3 graphisch dargestellt, man erhält

$$\lambda_2=2{,}0593\,.$$

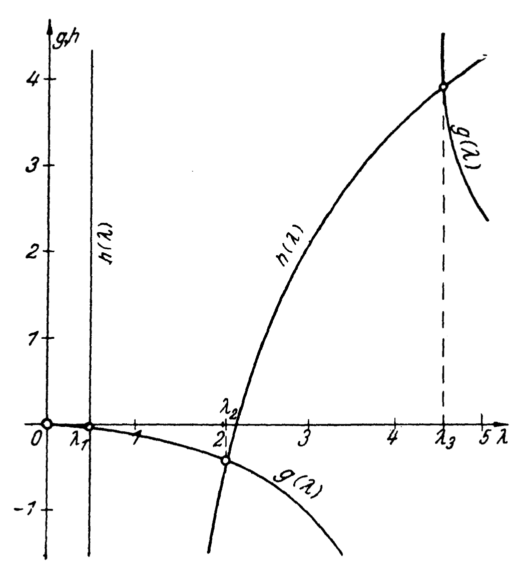


Abb. 21·3. Kettenbruchmethode für den zweiten Eigenwert.

2. Potenzreihenansatz. Für das Beispiel der Torsionsschwingung einer Scheibe, das bereits in Aufgabe 4 von 11·4 behandelt wurde:

$$-(e^{-x^2}y')'=\lambda e^{-x^2}y \quad \text{oder} \quad -y''+2xy'=\lambda y$$
$$y(0)=y'(1)=0$$

sollen die zwei kleinsten Eigenwerte mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

berechnet werden.

Durchrechnung: Einsetzen der Potenzreihe in die Differentialgleichung $-y'' + 2xy' - \lambda y = 0$ ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} [-(n+1)(n+2)a_{n+2} + (2n-\lambda)a_n]\, x_n = 0 .$$

Es müssen die eckigen Klammern einzeln $= 0$ gesetzt werden. Man erhält so für die a_n die Rekursionsformel

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n .$$

Einen bei $y(x)$ freien Faktor kann man durch $y'(0) = a_1 = 1$ festlegen; $y(0) = 0$ ergibt $a_0 = 0$.

Somit folgt

$$y(x) = x - \frac{\lambda-2}{3!} x^3 + \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5!} x^5 - \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)}{7!} x^7 + \cdots$$

Die zweite Randbedingung $y'(1) = 0$ stellt dann die transzendente Gleichung für die Eigenwerte λ dar:

$$g(\lambda) = 1 - \frac{\lambda-2}{2!} + \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{4!} - \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)}{6!} + \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)(\lambda-14)}{8!} - + \cdots = 0 .$$

Die Nullstellen dieser Funktion $g(\lambda)$ bestimmt man am besten nicht durch Abbrechen der Reihe und Auflösen der so entstehenden algebraischen Gleichung, sondern indem man $g(\lambda)$ für einige Werte λ nach der gut konvergierenden Reihe berechnet und durch Interpolation die Nullstellen von $g(\lambda)$ ermittelt. Man erhält

$$\lambda_1 = 3{,}59692 , \qquad \lambda_2 = 23{,}518 .$$

3. Potenzreihenansatz: Man berechne den kleinsten Eigenwert von

$$-\left(\frac{y'}{1+x}\right)' = \lambda y , \qquad y(0) = y(1) = 0 ,$$

indem man hier zweckmäßig nicht für y, sondern für $\frac{y'}{1+x}$ den Reihenansatz $\frac{y'}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ macht.

Ergebnis: Einsetzen der Potenzreihe in die Differentialgleichung liefert mit $b_n = n!\, a_n$ die Rekursionsformel

$$b_{n+1} = -\lambda(b_{n-1} + (n-1)b_{n-2}) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Mit $b_0 = 1$ erhält man $b_1 = 0$, $b_2 = b_3 = -\lambda$,

$$b_4 = \lambda^2,\ b_5 = 4\lambda^2,\ b_6 = 4\lambda^2 - \lambda^3,\ b_7 = -9\lambda^3,\ b_8 = -28\lambda^3 + \lambda^4, \ldots$$

Aus $y(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)!} b_n = 0$ folgt für λ die transzendente Gleichung

$$\frac{3}{2} - \frac{11}{30}\lambda + \frac{13}{480}\lambda^2 - \frac{953}{7!\,198}\lambda^3 + \frac{785}{11!}\lambda^4 - \cdots = 0 ,$$

aus der man wie bei Aufgabe 2 (nicht durch Abbrechen) als erste Nullstelle

$$\lambda_1 = 6{,}774$$

erhält.

4. **Kombination verschiedener Methoden.** Man berechne die ersten drei Eigenwerte des Problems $-\left(\frac{y'}{1+x}\right)' = \lambda y;\ y(0) = y(1) = 0.$

Vergleichungssatz: Ebenso wie man in 8·5 Aussagen über das Wandern der Eigenwerte bei Abändern des Ausdruckes $N[y]$ machen konnte, erhält man hier durch Vergleich mit den Problemen $-\frac{1}{2}y'' = \lambda y$ und $-y'' = \lambda y$ bei denselben Randbedingungen die groben Schranken: $\frac{1}{2}k^2\pi^2 \leq \lambda_k \leq k^2\pi^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Einschließungssatz: Mit der die Randbedingungen erfüllenden Funktion

$$F_1(x) = (1+x)^{-n} \sin\left[k\pi \frac{(1+x)^{2n+2}-1}{2^{2n+2}-1}\right]$$

bildet man nach (9·6) die Hilfsfunktion

$$\Phi(x) = k^2\pi^2 \left(\frac{2n+2}{2^{2n+2}-1}\right)^2 (1+x)^{4n+1} - \frac{n(n+2)}{(1+x)^3}. \tag{21·24}$$

Für $n = -\frac{1}{4}$, also $4n+1 = 0$ hat man damit die Schranken

$$(k\pi A)^2 + \frac{7}{128} \leq \lambda_k \leq (k\pi A)^2 + \frac{7}{16} \text{ mit } A = \frac{3}{14}\left(2\sqrt{2}+1\right) \tag{21·25}$$

oder in Zahlen

$$\begin{aligned} 6{,}697 &\leq \lambda_1 \leq 7{,}080 \\ 26{,}624 &\leq \lambda_2 \leq 27{,}008 \\ 59{,}836 &\leq \lambda_3 \leq 60{,}220\,. \end{aligned} \tag{21·26}$$

Die Schranken werden prozentual gerechnet, für die höheren Eigenwerte günstiger.

Die Schranken lassen sich mit Hilfe der GREENschen Funktion (nach Tafel IV)

$$G(x,\xi) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2}\right)\right) \text{ für } x \leq \xi$$

verbessern. Nach (7·21) gilt dann

$$\int_0^1\int_0^1 [G(x,\xi)]^2 dx\, d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{383}{16200}.$$

Benutzt man von (21·25) für $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ obere Schranken, so folgt hieraus $\lambda_1 \geq 6{,}7617$; benutzt man noch für weitere λ_k obere Schranken, so kann man $\lambda_1 \geq 6{,}768$ herleiten.

Zur Verschärfung der Schranken kann man ferner in (21·24) die Größe n variieren und bei Aufzeichnen der Funktionen $\Phi(x)$ für mehrere Werte von n ungefähre Werte für die günstigsten n-Werte durch Interpolation bestimmen:

k	$4n+1$	Extremwerte von Φ	Schranken für die Eigenwerte
1	0,078	$\Phi_{max} = 6{,}843$	$6{,}764 \leq \lambda_1 \leq 6{,}843$
	0,050	$\Phi_{min} = 6{,}764$	
2	0,0206	$\Phi_{max} = 26{,}782$	$26{,}695 \leq \lambda_2 \leq 26{,}782$
	0,013	$\Phi_{min} = 26{,}695$	
3	0,0092	$\Phi_{max} = 60{,}00$	$59{,}91 \leq \lambda_3 \leq 60{,}00$
	0,0056	$\Phi_{min} = 59{,}91$	

Für die höheren Eigenwerte ist diese Methode wohl allen anderen überlegen.

Schrittweise Näherungen: Ausgehend von $F_0(x) = 360(x - x^2)$ erhält man nach 12·5

$$F_1(x) = 34x + 17x^2 - 60x^3 - 15x^4 + 24x^5$$

und nach (12·20)

$$a_0 = 4320, \quad a_1 = \frac{4422}{7}, \quad a_2 = \frac{107494}{1155},$$

$$\mu_1 = 6{,}8385, \quad \mu_2 = 6{,}7876.$$

Benutzt man nach (21·26) $l_2 = 26{,}624$, so liefert (12·21)

$$6{,}770 \leq \lambda_1 \leq 6{,}788.$$

5. Man zeige, daß bei der Eigenwert-Funktionalgleichung

$$-y''(x) = \lambda\, y\left(\frac{x}{2}\right)$$

mit den Randbedingungen

$$y(-1) = y(1) = 0$$

(y bei $x = 0$ regulär) abzählbar unendlich viele positive Eigenwerte λ_n existieren, die aber nicht wie bei (7.53) mit n quadratisch, sondern exponentiell anwachsen. Mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes berechne man die ersten drei Eigenwerte.

Ergebnis: Es gilt $\lambda_n \geq \lambda_1 \cdot 2^{n-1}$ für $n = 1, 2, \ldots$

$$\lambda_1 = 2{,}091 \qquad \lambda_2 = 13{,}1 \qquad \lambda_3 = 51{,}6.$$

6. Mit Hilfe der DUNKERLEYschen Formel (21·5) gebe man eine untere Schranke an für den ersten Eigenwert λ_1 des Problems

$$y^{\mathrm{IV}} = \lambda(10y - y''); \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0.$$

Ausrechnung. Der kleinste Eigenwert von

$$y^{\mathrm{IV}} = 10\lambda^{(1)} y; \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$$

ist

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(4{,}730\,04)^4}{10} \quad \text{(nach Tafel VI)},$$

und der von

$$y^{\mathrm{IV}} = -\lambda^{(2)} y''; \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$$

ist

$$\lambda_1^{(2)} = 4\pi^2.$$

Damit liefert (21·5)

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\dfrac{1}{\lambda_1^{(1)}} + \dfrac{1}{\lambda_1^{(2)}}} = 22{,}071.$$

Um den Eigenwert λ_1 einzuschließen, wird noch mit Hilfe des RAYLEIGHschen Quotienten (4·25)

$$R[u] = \frac{\int_0^1 u''\,dx}{\int_0^1 (10u^2 + u'^2)\,dx}$$

mittels der Vergleichsfunktion $u = 1 - \cos 2\pi x$ eine obere Schranke ausgerechnet:

$$\lambda_1 \leq 22{,}432.$$

Der Mittelwert $\lambda_1 \approx 22{,}25$ ist dann höchstens um 1% falsch.

Vorschläge für die Auswahl des zu benutzenden Verfahrens zur genäherten Eigenwertsberechnung.

Es ist natürlich unmöglich, allgemein anzugeben, welche der in diesem Buche genannten Methoden in einem vorgelegten Einzelfalle die geeignetste ist. Je nach Veranlagung wird jeder Rechner bestimmte Methoden anderen gegenüber bevorzugen und bei einiger Übung auch selbst Abwandlungen und Kombinationen der hier beschriebenen allgemeinen Verfahren benutzen.

Im folgenden soll lediglich in kurzer Zusammenfassung ohne Anspruch auf Vollständigkeit an einige der wichtigsten Methoden erinnert werden.

1 Formelmäßige Lösung.

a) Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in geschlossener Form angeben. Die Integrationskonstanten sind den vorgegebenen Randbedingungen anzupassen.

b) Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten und bei partiellen Differentialgleichungen wird es nur in Ausnahmefällen gelingen, die Lösung in geschlossener Form anzugeben. Einige einfache Beispiele solcher geschlossen lösbaren Fälle sind in Tafel V und VI, S. 141—149, wiedergegeben. Im allgemeinen ist man zur Eigenwertberechnung jedoch auf numerische oder graphische Näherungsverfahren angewiesen.

2. Überschlagsmäßige Rechnung.

a) Bei geringen Genauigkeitsansprüchen kann man oft sehr schnell mit Hilfe des Vergleichungssatzes von 8·5 oder des Einschließungssatzes von § 9 Schranken für den ersten und auch für die höheren Eigenwerte aufstellen. Man vergleicht dabei das vorgelegte Problem mit anderen, geschlossen lösbaren Problemen, z. B. bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Problemen mit konstanten Koeffizienten. Die Schranken des Einschließungssatzes können oft durch Mitnahme freier Parameter wesentlich verbessert werden (vgl. Aufg. 6 von 11·4, S. 176).

b) Das gewöhnliche Differenzenverfahren, § 17 und 19, liefert bei grober Maschenweite, also mäßiger Rechenarbeit, einen Überblick über die Verteilung der niedrigsten Eigenwerte und den Verlauf der Eigenfunktionen (vgl. Aufg. 1 von 19·6). Braucht man genauere Werte, so rechne man nicht mit kleinerer Maschenweite, sondern benutze eines der verbesserten Differenzenverfahren.

3. Genauere Rechnung.

a) Für den ersten Eigenwert ist in den Fällen, in denen die Zusatzvoraussetzungen des Satzes in 12·4 erfüllt sind, das Verfahren der schrittweisen Näherungen mit der oberen und unteren Schranke nach (12·19) wohl das geeignetste Verfahren; es läßt sich je nach Beschaffenheit des Problems sowohl rechnerisch, als auch bequem graphisch durchführen (§ 12 und 13, insbesondere 12·5, 12·6, 13·6).

b) Einen größeren Anwendungsbereich (vgl. 16·1) hat das RITZsche Verfahren, § 15 und 16; es liefert zugleich für die höheren Eigenwerte obere Schranken. Braucht man die höheren Eigenwerte genauer, so nehme man genügend viele Glieder beim RITZschen Ansatz, also z. B. zur Berechnung des zweiten Eigenwertes λ_2 mindestens drei Glieder mit. Die Güte der RITZschen Näherungswerte kann stark von der Güte der gewählten Ausgangsfunktionen abhängen. Man führt daher das RITZsche Verfahren oft (bei graphischer Durchführung stets) in der Weise durch, daß man gewählte Ausgangsfunktionen durch einen Iterationsschritt verbessert.

In vielen Fällen besteht die Möglichkeit, das Verfahren nach einem halben Iterationsschritt abzubrechen. Man kann dann mit weniger Rechen- bzw. Zeichenarbeit (im Vergleich zum vollen Iterationsschritt), allerdings auch geringerer Endgenauigkeit die GRAMMELschen Gleichungen 15·6 und 16·10 aufstellen und aus ihnen Näherungen für Eigenwerte und Eigenfunktionen berechnen.

c) Einen noch größeren Anwendungsbereich besitzt das Differenzenverfahren, es ist an keine Zusatzvoraussetzungen gebunden und bei manchen Problemen, besonders bei partiellen Differentialgleichungen, das einzige praktisch durchführbare Näherungsverfahren. Die verschärften Verfahren sind in § 18 und 19 beschrieben. Man kann aber beim Differenzenverfahren wenig über die Näherungen aussagen, im allgemeinen nicht einmal, ob die Näherungswerte zu groß oder zu klein sind.

4. Besondere Verfahren.

Außerdem stehen eine große Anzahl anderer Methoden zur Verfügung, die je nach dem vorliegenden Falle sehr geeignet sein können; anstatt viele Verfahren aufzuführen, seien hier nur die Reihenentwicklungen, 21·5 und 21·6, die Störungsrechnung § 20 und Integralgleichungsmethoden § 7 genannt.

Verzeichnis der behandelten Beispiele.

Abkürzungen der Methoden: *B* Bemerkungen, *D* Differenzenverfahren, *Du* DUNKERLEYsche Formel, *Dv* Verbessertes Differenzenverfahren, *e* exakte Lösungen, *E* Einschließungssatz, *G* GREENsche Funktion, *I* Integralgleichungsmethode, *K* Kettenbruchmethode, *P* Potenzreihenmethode, *R* Verfahren nach RAYLEIGH und RITZ, *S* Verfahren der schrittweisen Näherungen, *St* Störungsrechnung, *V* Vergleichungssatz.

Differentialgleichung	Randbedingungen	Methode und Seitenangabe
Differentialgleichungen zweiter Ordnung.		
$-y'' = \lambda y$ (siehe auch Tafel VI)	Typus: $y(a) = y(b) = 0$	*G* 82, *e* 173, *R* 260
	Typus: $y(a) = y'(b) = 0$	*e* 6, *G* 85, *E* 137, *R* 258, *S* 137, *e* 299, *Dv* 298
	Typus: $y(0) = c_1 y(1) + c_2 y'(1) = 0$	*B* 124, *S* 180, *R* 222, 233, *G* 85
	Typus: $y'(0) = c_1 y(1) + c_2 y'(1) = 0$	*B* 124, *S* 216
	Typus: $y(0) = y(1) - k(\lambda) y'(1) = 0$	*e* 56
	$y'(0) - A\,y(0) = y'(l) - B\,y(l) = 0$	*B* 65, *e* 71
	$y(0) = y'(1) - \lambda y'(0) = 0$	*e* 121
	$y(0) - y(1) = y'(0) + y'(1) = 0$	*e* 87
$-y'' = \lambda p(x) y$	$y(0) = y(a) = 0$	*E* 140
$p(x) = 10 - x^2$ und einige andere Beispiele	$y(\pm 1) = 0$	*e* 123
$-y'' = \lambda \cdot \operatorname{sgn} x \cdot y$	$y(\pm 1) = 0$	*e* 123
$-y'' = \begin{cases} 2\lambda y & \text{für } x < \frac{1}{2} \\ \lambda y & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}$	$y(0) = y(1) = 0$	*e* 265, *D* 264, *Dv* 274, 278
$-y'' = \lambda(1 + \sin x)\, y$	$y(0) = y(\pi) = 0$	*E* 176, *S* 187
$-y'' = \lambda(2 + \cos x)\, y$	$y(0) = y(\pi) = 0$	*S* 218, *R* 259, *K* 320
$-y'' = \lambda x y$	$y(0) = y(1) = 0$	*D* 299, *Dv* 299, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) 316
$-y'' = \lambda(1 + x^2)\, y$	$y(\pm 1) = 0$	*D* 297
$-y'' = (\lambda - 2h^2 \cos 2x)\, y$	Periodizität	*K* 316
$-(e^{-x^2} y')' = \lambda e^{-x^2} y$	$y(0) = y'(1) = 0$	*E* 175, *Dv* 279, *P* 322, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) 304—308
$-\left(\frac{y'}{1+x}\right)' = \lambda y$	$y(0) = y(1) = 0$	*D* 304, *P* 323, *V* 324, *E* 324, *G* 324, *S* 325
$y'' = \lambda y'$	$y(0) = y(l) = 0$	*e* 121
einige weitere Fälle in Tafel V, VI und S. 69, 121, 124, 325		

Differentialgleichung	Randbedingungen	Methode und Seitenangabe
Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung.		
$y^{IV} = \lambda y$	$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$	*I* 116, *R* 260, 261
(siehe auch Tafel VI)	Typus $y''(0) = y''(l) = 0$ $y(0) + c_1 y'''(0) = y(l) + c_2 y'''(l) = 0$	*e* 22, *B* 93
$y^{IV} = \lambda(1 + x) y$	$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$	*V* 135
$(\alpha y'')'' = \lambda g_0 y$	$y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0$	*S* 199, *R* 254
$y^{IV} + A((1 - x) y')' = \lambda y$	$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$	*S* 220, *R* 261
$y^{IV} = -\lambda y''$	$y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$ $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$ verschiedene andere Randbedingungen	*e* 299, *D* 299, *Dv* 300 *e* 63, *S* 220 *e* 54, 55, 88, 93, 121, Tafel VI
$y^{IV} + A y = -\lambda y''$ $y^{IV} + 4 y = -\lambda y''$ $y^{IV} + \frac{9\pi^4}{l^4} y = -\lambda y''$	$y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$ $y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0$ $y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$	*E* 175, *S* 219, *R* 260 *e* 91, *St* 308 *e* 123
$y^{IV} = \lambda_1 y - 2\lambda_2 y''$ $y^{IV} = \lambda(10 y - y'')$	$y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$ $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$	*e* 173 *R* 325, *Du* 325
$y^{IV} + \varepsilon(x y')' = -\lambda y''$	$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$	*St* 312
$[(2 - x) y'']'' = -\lambda y''$	$y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0$	*S* 188, *R* 258, *D* 266
$[(3 - x^2) y'']'' + 60 y = -\lambda y''$	$y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$	*E* 174, *S* 216
einige andere Fälle in Tafel VI und S. 125		
$y^{VI} = r(x)$	$y, y', y'' = 0$ für $x = 0$ und 1	*G* 122
$-y^{VI} - 49 y'' = \lambda(14 y^{IV} + 36 y)$	$y, y'', y^{IV} = 0$ für $x = 0$ und π	*e* 91
$-y^{VI} + 2 y^{IV} - y'' = \lambda(-y'' + y)$	y, y', y'' oder $y, y', y''' = 0$ für $x = a$ und $x = b$	*B* 70
Mehrere Felder der Differentialgleichung.		
Stabknickung mit zwei Knicklasten		*e* 33
Torsionsschwingungen einer Welle mit zwei Einzeldrehmassen		*e* 37, *R* 249
Biegeschwingung eines Trägers auf zwei Stützen mit Einzelmasse		*e* 33, *R* 246
Biegeschwingung eines Trägers auf drei Stützen oder eines Rahmens		*e* 33, 36, *R* 257
Partielle Differentialgleichung (Membranschwingungen).		
$-\Delta z = \lambda z$	$z = 0$ am Rande	
	Quadrat	*e* 122, *D* 302
	Kreis	*G* 99
	Ellipse	*R* 251, *D* 283
	Rhombus	*D* 293, *Dv* 296, Tafel XI
	Dreieck	*D* 290, *Dv* 291, *e* 292, T. el X Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) 305—309

Namenverzeichnis.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

Sachverzeichnis.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)